

NOI FUNCȚII ÎN TEORIA NUMERELOR

$\eta(1) = 0$	
$\eta(2) = 2$	2
	1
$\eta(3) = 3$	1 0 1
	1 0 0 1
$\eta(4) = 4$	1 0 1 1
	1 1 1 0 0
$\eta(5) = 5$	2 1 0 0 1 0
	2 1 0 1 1 0 1
$\eta(6) = 3$	4 1 1 1 0 1 1 1
	3 1 0 1 0 2 1 1 0
$\eta(7) = 7$	3 1 0 1 3 2 1 1 0 1
	2 1 0 4 3 2 0 0 1 1 1
$\eta(8) = 4$	1 5 4 0 1 0 0 2 1 0 0 1 1
	6 4 3 1 0 0 2 1 1 0 0 1 0
$\eta(9) = 6$	1 3 0 2 2 2 1 1 0 0 1 1
	7 1 3 3 0 2 1 1 0 1 1 1
$\eta(10) = 5$	2 0 3 2 1 1 1 0 1 1
	9 1 0 2 1 1 0 0 1 1
$\eta(11) = 11$	3 1 0 2 1 0 0 1 0
	6 1 2 2 1 0 1 1
$\eta(12) = 4$	2 4 2 2 1 1 1
	2 3 4 1 1 0 1
$\eta(13) = 13$	1 1 9 5 1 1
	1 10 1 2 1
$\eta(14) = 7$	11 10 7 2
	11 0 8 0
$\eta(15) = 5$	11 2 7
	6 2 1
$\eta(16) = 6$	13 1
	13 1
$\eta(17) = 17$	14
	14
$\eta(18) = 6$	
$\eta(19) = 19$	
$\eta(20) = 5$	

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
CATEDRA DE ALGEBRĂ, LOGICĂ, ȘI TEORIA NUMERELOR

FLORENTIN SMARANDACHE

NOI FUNCȚII ÎN TEORIA NUMERELOR

Chișinău - 1999

Prof. Florentin Smarandache
University of New Mexico
Gallup, NM 87301, USA
Fax: (505) 863-7532 (Attn. Dr. Smarandache)
E-mail: smarand@unm.edu

© U.S.M. - 1999

Secția poligrafie operativă
a U.S.M. 2009, Chișinău,
Str. A.Mateevici, 60

Cuprins:

Introducere	5
1. O NOUĂ FUNCȚIE ÎN TEORIA NUMERELOR	
1.1. Definiția, construcția, și proprietăți ale acestei funcții	14
1.2. O infinitate de probleme nerezolvate referitoare la această funcție	29
1.3. Rezolvând probleme cu ajutorul acestei funcții	66
1.4. Câteva ecuații liniare implicând această funcție	73
2. ALTĂ FUNCȚIE ÎN TEORIA NUMERELOR	78
3. FUNCȚII PRIME ÎN TEORIA NUMERELOR	83
4. ASUPRA FUNCȚIEI TOTIENT A LUI EULER ÎN TEORIA NUMERELOR	
4.1. O proprietate a unui contraexemplu la Conjectura lui Carmichael referitoare la funcția totient a lui Euler .	91
4.2. Altă proprietate a unui contraexemplu la Conjectura lui Carmichael referitoare la funcția totient a lui Euler .	96
4.3. O generalizare a teoremei lui Euler privind congruențele referitoare la funcția totient a lui Euler	99
Referințe generale (în ordine cronologică)	104

Teoria Analitică a Numerelor reprezintă pentru mine o pasiune. Rezultatele expuse mai departe constituie rodul câtorva ani buni de cercetări și căutări.

Lucrarea de față se compune din 9 articole, publicate toate prin reviste de matematică românești sau străine, iar unele prezentate chiar la congrese și conferințe naționale cât și internaționale [vezi "Lista publicațiilor autorului pe tema tezei"].

Ea se structurează în patru capitole:

- în primele trei capitole se introduc noi funcții în teoria numerelor, se studiază proprietățile lor, probleme nerezolvate legate de ele, implicații în lumea științifică internațională (ce alți matematicieni au abordat noțiunile acestea), conexiuni cu alte funcții bine știute, importanța rezultatelor obținute;
- în ultimul capitol se aduc contribuții la studierea unei funcții cunoscute în teoria numerelor (totient sau ϕ a lui Euler), în principal referitoare la conjectura lui Carmichael.
[Există referințe particulare după fiecare paragraf (articol), iar referințe generale în finalul tezei.]

Actualitatea temei din teză este evidentă, din moment ce la Universitatea din Craiova, Conf. dr. C. Dumitrescu & Conf. dr. V. Seleacu organizează <Prima Conferința Internațională dedicată Noțiunilor de tip 'Smarandache' în Teoria Numerelor>, și anume: funcții (η și extinderi ale sale, L , funcții prime), secvențe, operații speciale, criterii de divizibilitate, teoreme, etc. de tip 'Smarandache', în perioada 21-24 August 1997
[vezi și anunțul din "Notices of the American Mathematical Society", University of Providence, RI, SUA, Vol. 42, No. 11, rubrica "Mathematics Calendar", p. 1366, Noiembrie 1995].
Conferința se va desfășura sub egida UNESCO [240]
[cf. Mircea Ichim, director, și Lucreția Băluță, secretară, Filiala UNESCO din București].

În felul acesta se deschid noi drumuri în Teoria Analitică a Numerelor, formând un domeniu aparte, care a trezit interesul diversilor specialiști.

Un grup de cercetare privind aceste noțiuni, în special concentrat asupra Funcției Smarandache, s-a format la Universitatea din Craiova, România, Catedra de Matematică, condus de către Prof. dr. A. Dincă (decan), Prof. dr. V. Boju, Conf. dr. V. Seleacu, Conf. dr. C. Dumitrescu, Conf. dr. I. Bălăcenoiu, Conf. dr. Șt. Zănfir, Conf. dr. N. Rădescu, Lect. E. Rădescu, Lect. dr. I. Cojocaru, Lect. dr. Paul Popescu, Asist. drd. Marcela Popescu, Asist. N. Vîrlan, Asist. drd. Carmen Roșoreanu, prof. S. Cojocaru, prof. L. Tuțescu, prof. E. Burton, prof. Panait Popescu, cercet. șt. M. Andrei, student Tomiță Tiberiu Florin, și alte cadre didactice împreună cu studenți.
Membrii acestui grup se întâlnesc o dată pe săptămână, în timpul anului școlar, și expun ultimele cercetări asupra funcției η ,

precum și încercări de generalizare.

În afara grupului de cercetare de la Craiova, destui matematicieni și informaticieni străini s-au ocupat de studiului funcției η , cei mai activi fiind: Henry Ibstedt (Suedia), Pål Grønås (Norvegia), Jim Duncan, John C. McCarthy, John R. Sutton (Anglia), Ken Tauscher (Australia), Th. Martin (SUA), Pedro Melendez (Brazilia), M. Costewitz (Franța), J. Rodriguez (Mexic), etc.

[Pentru o imagine mai detaliată, vezi cele 240 de "Referințe" de la sfârșit.]

Despre însemnătatea "Funcției Smarandache", cum a fost botezată în revista londoneză <Personal Computer World>, Iulie 1992, p. 420, și-a dat pentru prima dată seama scientistul englez Mike Mudge, editor al rubricii <Numbers Count> [10]. Iar valorile funcției, $\eta(n) = 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 4, 6, 5, 11, 4, 13, \dots$ au fost etalate de N. J. A. Sloane & Simon Plouffe în <Encyclopedia of Integer Sequences>, Academic Press, [M0453], 1995, și denumite "Numerele Smarandache" [140].

Articolele, notele, problemele (rezolvate sau deschise), conjecturile referitoare la această nouă funcție în teoria numerelor sunt colectate într-o revistă specială numită "Smarandache Function Journal", publicată anual ori bianual, de Dr. R. Muller, Number Theory Publishing Co., Glendale, Arizona, SUA.

Mai mult, Ch. Ashbacher (SUA) i-a dedicat însăși o monografie: "An introduction to the Smarandache function", Erhus Univ. Press, Vail, 1995 [194], iar Kenichiro Kashihara (Japonia) are în pregătire o altă carte despre η [235].

De asemenea, multe reviste și chiar enciclopedii și-au deschis paginile inserării de lucrări ce tratează, recenzează, sau citează funcția η și valorile ei

[vezi "Personal Computer World" (Londra), "Humanistic Mathematics Network Journal" (Harvey Mudd College, Claremont, CA, SUA), "Libertas Mathematica" (Texas State University), "Octogon" (Brașov, România), "Encyclopedia of Integer Sequences" de N. J. A. Sloane & Simon Plouffe (Academic Press; San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto; 1995), "Journal of Recreational Mathematics" (SUA), "Foaie Matematică" (Chișinău, Moldova), "The Mathematical Spectrum" (University of Sheffield, Anglia), "Elemente der Mathematik" (Elveția), "Zentralblatt fur Mathematik" (Berlin, Germania), "The Mathematical Reviews" (Ann Arbor, SUA), "The Fibonacci Quarterly" (SUA), etc.].

Iar la conferințe naționale și internaționale organizate, de exemplu la New Mexico State University (Las Cruces, SUA), University of Arizona (Tucson), University of San Antonio (Texas), State University of New York at Farmingdale, University of Victoria (Canada), Congrès International <Henry Poincaré> (Université de Nancy, Franța), <26th Annual Iranian Mathematics Conference> (Kerman, Iran), <The Second Asian Mathematics Conference> (Nakhon Ratchasima, Tailanda), <Programul manifestărilor organizate cu prilejul împlinirii a 100 ani de la apariția primului număr al revistei 'Gazeta Matematică' 1895-1995> (Alba Iulia, România), etc. s-au prezentat articole științifice despre η în perioada 1991-5.

Arhive care stochează cercetările asupra funcției η (cărți, reviste, broșuri, manuscrise publicate ori inedite, articole, note, comentarii, scrisori -- obișnuite ori electronice -- de la diverși matematicieni și editori, probleme, aplicații, programe de conferințe și simpozioane, etc.), cât și asupra altor noțiuni din această teză, se găsesc la:

a) Arizona State University, Hayden Library, Colecția Specială (online) "The Florentin Smarandache papers", Tempe, AZ 85287, USA; phone: (602) 965-6515, e-mail: ICCLM@ASUACAD.BITNET, responsabile: Carol Moore & Marilyn Wurzburger;

b) Archives of American Mathematics, Center for American History SRH 2.109, University of Texas, Colecția Specială "The Florentin Smarandache papers", Austin, TX 78713, USA; phone: (512) 495-4129, fax: (512) 495-4542, director Don Carleton;

c) Biblioteca Universității din Craiova, Str. Al. I. Cuza, Nr. 13, Secția de Informare și Documentare "Florentin Smarandache" din cadrul Seminarului Matematic <Gh. Țițeica>, director O. Lohon, bibliotecară Maria Buz, fax: (051) 411688, România;

d) Arhivele Statului, Filiala Vâlcea, Fondul Special "Florentin Smarandache", responsabil: Ion Soare, Str. General Praporgescu, Nr. 32B, Rm. Vâlcea, Jud. Vâlcea, România; care sunt puse la dispoziția publicului spre consultare.

1.1. În primul paragraf al primului capitol din teză se definește, așadar, o nouă funcție:

$$\eta : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N},$$

$$\eta(n) \text{ este cel mai mic întreg } m \text{ astfel încât } m! \text{ este}$$

$$\text{divizibil cu } n.$$

Pentru calcularea lui η , construim funcțiile ajutătoare η_p , unde p este număr prim pozitiv, astfel: $\eta_p: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \eta_p(a_n^{(p)}) = p^n,$$

$$\eta_p(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_k a_{n_k}^{(p)}) = t_1 \eta_p(a_{n_1}^{(p)}) + \dots$$

$$+ t_k \eta_p(a_{n_k}^{(p)}),$$

$$\text{iar } a_n^{(p)} = \frac{p^n - 1}{p - 1}, \text{ pentru } n > 0. \quad \text{De unde obținem pe } \eta:$$

$$\forall n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \text{ cu } \epsilon = \pm 1, p_i = \text{prime},$$

$$p_i = p_j \text{ for } i = j, \alpha_i \geq 1, i = \overline{1, s}, \eta(n) =$$

$$= \max_{i=1, s} (\eta_{p_i}(\alpha_i)), \quad \eta(\pm 1) = 0.$$

funcție este importantă deoarece caracterizează numerele prime -- prin următoarea proprietate fundamentală:

Fie p un număr întreg > 4 , atunci p este prim dacă și numai dacă $\eta(p) = p$.

Deci, punctele fixe ale acestei funcții sunt numere prime (la care se adaugă și 4). Datorită acestei proprietăți, funcția η se folosește ca o sită pentru cernerea numerele prime.

Studierea și descoperirea unor relații despre funcția η duce implicit la aprofundarea cunoștințelor despre numerelor prime, o preocupare în prezent fiind distribuirea lor.

[E. Burton încearcă generalizarea funcției η în corpul numerelor complexe [169].]

Totodată, funcția η intră în conexiune și cu foarte cunoscuta funcție $\Pi(x)$, care reprezintă numărul de numere prime mai mici decât sau egale cu x , prin următoarea formulă:

$$\text{Pentru } x \geq 4, \quad \Pi(x) = \sum_{k=2}^x \left[\eta(k)/k \right] - 1.$$

unde $[b]$ înseamnă partea întreagă a lui b

[vezi L. Seagull [189]].

Alte proprietăți:

Dacă $(a, b) = 1$, atunci $\eta(ab) = \max\{\eta(a), \eta(b)\}$.

Pentru orice numere pozitive nenule, $\eta(ab) \leq \eta(a) + \eta(b)$.

η este o funcție general crescătoare, adică:

$\forall a \in \mathbb{N} \exists b \in \mathbb{N}, b = b(a), \forall c \in \mathbb{N}, c > b, \eta(c) > a$.

Funcția η face obiectul multor probleme deschise, care au trezit interesul matematicienilor.
De exemplu:

a) Ecuatia $\eta(n) = \eta(n+1)$ nu are nici o soluție.

Nu a fost încă demonstrată, deși I. Prodănescu [29, 92] crezuse inițial că i-a găsit o soluție. L. Tuțescu [30] i-a dat o extindere acestei conjecturi.

b) A. Mullin [239], inspirat de problema anterioară, conjecturează că ecuația $\eta(n) = \eta(n+2)$ are doar un număr finit de soluții.

c) T. Yau [63] a propus determinarea tuturor valorilor pentru care funcția η păstrează relația de recurență a lui Fibonacci, adică:

$$\eta(n) + \eta(n+1) = \eta(n+2),$$

neștiindu-se dacă acestea sunt în număr finit ori infinit. El însuși aflând pe $n = 9, 119$. Ch. Ashbacher [182, 207] a investigat relația de mai sus cu un program pe calculator până la $n = 1000000$, descoperind valori adiționale pentru $n = 4900, 26243, 32110, 64008, 368138, 415662$, dar nedemonstrând pe cazul general. H. Ibstedt [224] presupune că există o infinitate de astfel de triplete.

d) Renumitul academician, P. Erdos [147], de la Academia Ungară de Științe, solicită cititorilor revistei engleze <Mathematical Spectrum>, în care publică o scrisoare, să găsească o formulă asimptotică pentru:

$$\frac{\sum_{n < x} n(n)^2}{n(n) > P(n)}$$

unde $P(n)$ reprezintă cel mai mare factor prim al lui n .

La o conferință internațională, W. Sierpinski a afirmat că dacă omenirea va dura veșnic, iar problemele nerezolvate ar fi numerotate, atunci s-ar ajunge cu timpul ca toate aceste probleme să fie rezolvate.

În paragraful 1.2 ne-am propus să arătăm că putem avea o infinitate de probleme fără soluții, astfel încât niciodată ele să nu fie rezolvate toate!

Fiecare perioadă de timp are problemele ei deschise, cărora de obicei li se dă de cap mai târziu, odată cu progresul științei.

Și, totuși, numărul noilor probleme nerezolvate, care apar datorită cercetărilor firești, crește exponențial, în comparație cu numărul vechilor probleme nerezolvate ce sunt în prezent soluționate.

Oare, existența problemelor deschise constituie o criză matematică ori, dimpotrivă, absența lor ar însemna mai de grabă o stagnare intelectuală?

"Funcția Smarandache" este pusă în combinații și relații cu alte funcții ori noțiuni din teoria numerelor și analiză, precum: secvențe-A, numărul de divizori, diferența dintre două numere prime consecutive, serii Dirichlet, funcții generatoare, funcția logaritm, ordin normal, condiție Lipschitz, funcții multiplicative ori aditive, cel mai mare factor, distribuție uniformă, rădăcini necongruente, cardinal, triumphiul lui Pascal, secvență s-aditivă, suma părților alicuante, suma puterilor de ordin k ale părților alicuante, suma părților alicuante unitare, mediile aritmetică și geometrică, șiruri recurente, ecuații și inecuații diofantice, numărul de numere prime, numărul de numere prime congruente cu a modulo b , suma divizorilor, suma puterilor de ordin k ale divizorilor, suma divizorilor unitari, funcția ϕ a lui Euler, funcțiile gamma și beta, numărul de factori primi (cu repetiție), numărul factorilor primi distincți, partea întreagă, aproximații asimptotice, câmpuri algebrice, funcția Mobius, funcțiile Cebîșev θ și φ , etc.

Iar "Numerele Smarandache" sunt asociate și întrepătrunse respectiv cu:

numerele abundente, aproape perfecte, amicale, amicale mărite, numerele Bell, Bernoulli, Catalan, Carmichael, deficiente, Euler, Fermat, Fibonacci, Genocchi, numerele armonice, k -hiperperfecte, Kurepa, Mersenne, m -perfecte, numerele norocoase, k -îndoite perfecte, perfecte, poligonale, piramidale, poliedrale, primitive abundente, primitive pseudoperfecte, pseudoperfecte, pseudoprime, pitagoreice, reziduri pătratice, cvasiperfecte, Stirling de ordinul I și II, superperfecte, intangibile, numerele sinistre, numerele Ulam, etc.

În paragraful 1.3, se înfățișează o aplicație a funcției η la rezolvarea Problemei 1270, din <Mathematics Magazine>, SUA, 1987, propusă de Prof. R. B. Eggleton de la Universitatea din Newcastle, Australia, problemă pe care o generalizăm în felul următor:

Pentru ce valori ale lui a și n întregi nenule,
 $(n+h)!$ este divizibil cu a^n ?

În paragraful 1.4, η este implicată într-o ecuație semi-rezolvată (semi-nerezolvată!):

$\eta(mx) = x$, unde $m \in \mathbb{Z}$ este un parametru,

iar recurența ei, $\eta^{(i)} = \eta \circ \eta \circ \dots \circ \eta$ de i ori, într-o frumoasă problemă de existență și minim:

$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\} \exists k \in \mathbb{N} \eta^{(k)}(m) = \eta^{(k+1)}(m) = n_m$;
să se afle cel mai mic k cu această proprietate
(rangul), precum și n_m (n în funcție de m).

2. În capitolul doi se definește altă funcție în teoria analitică a numerelor, astfel:

$L : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $L(x, m) = (x+c_1) \dots (x+c_{\phi(m)})$,
unde $c_1, \dots, c_{\phi(m)}$ sunt clasele de resturi modulo m ,
prime cu m , iar ϕ este funcția totient a lui Euler,

care ne ajută să obținem generalizări separate ori simultane, parțiale ori totale, ale teoremelor lui Wilson, Fermat, Euler, Gauss, Lagrange, Leibnitz, Moser, și Sierpinski.

3. În capitolul trei se introduc următoarele funcții, denumite prime:

Pentru $k \in \mathbb{N}^+$, $P_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$,

$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ sunt} \\ & \text{toate prime;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$

În continuare se determină o condiție necesară și suficientă (Teoremă Generală) ca n numere, coprime două câte două, să fie toate prime (în mod simultan), adică $P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = 0$.

Fie P_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, coprime două câte două,

și fie $r_1, \dots, r_n$, $a_1, \dots, a_n$,

numere întregi astfel încât a_i să fie coprime cu r_i pentru
orice i .

Se consideră următoarele condiții:

(i) $p_{i_1}, \dots, p_{i_m_1}$ sunt simultan prime dacă și numai dacă
 $c_i \equiv 0 \pmod{r_i}$, pentru orice i .

Atunci:

Numerele p_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, sunt simultan prime
dacă și numai dacă

$$(R/D) \sum_{i=1}^n (a_i c_i / r_i) \equiv 0 \pmod{R/D},$$

unde $R = \prod_{i=1}^n r_i$, iar D este un divizor al lui R .

Această teoremă generală reușește să generalizeze teoremele lui V. Popa, I. Cucurezeanu, Clement, și S. Patrizio, etc.
 În plus, prin particularizarea ei, se obțin caracterizări interesante pentru numerele prime gemene, numerele prime cvadrupe, etc.

Aplicații:

$p_1, p_2, \dots, p_n$ sunt simultan prime dacă și numai dacă:

$$(T) \quad \sum_{i=1}^n [(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] \cdot \prod_{j=i}^n p_j \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \dots p_n}$$

ori

$$(V) \quad \sum_{i=1}^n [(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] p_i / p_i \equiv 0 \pmod{p_i}$$

ori

$$(W) \quad \sum_{i=1}^n [(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] / p_i \text{ is an integer.}$$

Iar în cazuri particulare obținem, așadar:
 Caracterizarea numerelor prime gemene:

Numerele impare p și $p+2$ sunt prime gemene dacă și numai
dacă:

$$[(p-1)! + 1] / p + [(p-1)! 2 + 1] / (p+2)$$

este un număr întreg.

Caracterizarea unui cvadruplu de numere prime

Numerele coprime între ele $p, p+2, p+6, p+8$ formează un
cvadruplu de numere prime, dacă și numai dacă:

$$\frac{[(p-1)!+1]}{p} + \frac{[(p-1)!2!+1]}{(p+2)} + \frac{[(p-1)!6!+1]}{(p+6)} + \frac{[(p-1)!8!+1]}{(p+8)} \text{ este număr întreg.}$$

4. Ultimul capitol abordează funcția totient (ϕ) a lui Euler:

$\phi(x)$ reprezintă numărul de numere prime cu x și mai mici
decât x , sau cardinalul unui sistem redus de reziduri
modulo x .

În legătură cu această importantă funcție în teoria numerelor, Carmichael a emis următoarea conjectură:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ecuația $\phi(x) = n$ nu poate avea o singură
soluție.

În paragraful 4.1 se aduc contribuții asupra conjecturii anterioare, demonstrându-se că:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ecuația $\phi(x) = n$ admite un număr finit de soluții;
iar dacă x_0 este soluția unică, atunci ea are forma
generală:

$$x_0 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2 \cdot k > 10^{10000}.$$

În paragraful 4.2 se extinde lema anterioară, arătând că:

x_0 este multiplul unui produs de foarte multe numere prime,
toate elemente ale unei mulțimi recurente M , care se
construiește în felul următor:

(a) elementele $2, 3 \in M$;

(b) dacă elementele distincte $2, 3, q_1, \dots, q_r \in$
 M , iar $p = 1 + 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_r$ este prim, unde
 $\alpha \in \{0, 1, \dots, 41\}$ și $\beta \in \{0, 1, \dots, 46\}$,
atunci $p \in M$; ($r \geq 0$);

(c) numai elementele obținute prin aplicarea
regulilor (a) sau (b) de un număr finit de
ori aparțin lui M .

Se observă că rezolvarea Conjecturii lui Carmichael este echivalentă cu demonstrarea că mulțimea recurentă M este infinită (adică nu există nici un contraexemplu de soluție unică a ecuației

de mai sus).

În paragraful 4.3 se generalizează teorema clasică a lui Euler referitoare la congruențe:

Dacă $(a, m) = 1$, atunci $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$,

unde avem din nou de-a face cu funcția ϕ a lui Euler;

sub forma următoare:

Fie $a, m \in \mathbb{Z}$, și $m \neq 0$. Atunci: $a^{\phi(m_s)} \equiv a^s \pmod{m}$,

unde s și m_s se obțin prin procedeul de mai jos:

$$(0) \begin{cases} a = a_0 d_0 & ; (a_0, m_0) = 1 \\ m = m_0 d_0 & ; d_0 \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_0 = d_0^1 d_1 & ; (d_0^1, m_1) = 1 \\ m_0 = m_1 d_1 & ; d_1 \neq 1 \end{cases}$$

.....

$$(s-1) \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^1 d_{s-1} & ; (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1} & ; d_{s-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^1 d_s & ; (d_{s-1}^1, m_s) = 1 \\ m_{s-1} = m_s d_s & ; d_s = 1. \end{cases}$$

Se construiește și un algoritm pentru implementarea pe computer a acestei generalizări:

(1) $A := a$,

$M := m$,

$i := 0$.

(2) Calculează $d = (A, M)$ și $M' = M/d$.

(3) Dacă $d = 1$, atunci $S = i$ și $m = M'$; stop.

Dacă $d \neq 1$, atunci $A := d$, $M := M'$, $i := i+1$,

și mergi la pasul (2).

1. O NOUĂ FUNCȚIE ÎN TEORIA ANALITICĂ A NUMERELOR

1.1. Definiție, construcție, și proprietăți ale acestei funcții

Abstract:

În această lucrare se construiește o funcție η care are următoarele proprietăți:

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0 \quad (\eta(n))! = M \cdot n.$$

(2) $\eta(n)$ este cel mai mic număr natural care are proprietatea (1).

Considerăm $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ și $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Lema 1.1.1. $\forall k, p \in N^*, p \neq 1$, k este scris în mod unic sub forma: $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$ unde $a_{n_i}^{(p)} = \frac{p^{n_i}-1}{p-1}$, $i = \overline{1, \ell}$, $n_1 > n_2 > \dots > n_\ell > 0$ și $1 \leq t_j \leq p-1$, $j = \overline{1, \ell-1}$, $1 \leq t_\ell \leq p$, $n_i, t_i \in N$, $i = \overline{1, \ell}$, $\ell \in N^*$.

Demonstrație. Șirul $(a_n^{(p)})_{n \in N^*}$ este format dintr-un număr infinit de numere naturale în ordine crescătoare, și $a_{m+1}^{(p)} - 1 = p \cdot a_n^{(p)}$, $\forall n \in N^*, p$ este fix,

$$a_1^{(p)} = 1, a_2^{(p)} = 1 + p, a_3^{(p)} = 1 + p + p^2, \dots$$

$$N^* = \bigcup_{n \in N^*} ([a_n^{(p)}, a_{m+1}^{(p)}) \cap N^*) \quad \text{unde } [a_n^{(p)}, a_{m+1}^{(p)}) \cap$$

$$\cap [a_{m_1}^{(p)}, a_{m_2}^{(p)}] = \emptyset$$

deoarece $a_n^{(p)} < a_{m_1}^{(p)} < a_{m_2}^{(p)}$.

Fie $k \in N^*$, $N^* = \bigcup_{n \in N^*} ([a_n^{(p)}, a_{n+1}^{(p)}) \cap N^*) = \exists! n_1 \in N^*: k \in$

$\in [a_{n_1}^{(p)}, a_{n_1+1}^{(p)}) - k$ este scris în mod unic

sub forma $k = \left[\frac{k}{a_{n_1}^{(p)}} \right] a_{n_1}^{(p)} + r_1$ (teorema împărțirii întregi).

Notăm: $\left[\frac{k}{a_{n_1}^{(p)}} \right] = t_1 - k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + r_1, r_1 < a_{n_1+1}^{(p)}$.

Dacă $r_1 = 0$, $a_{n_1}^{(p)} \leq k \leq a_{n_1+1}^{(p)} - 1 - 1 \leq t_1 \leq p$ și Lema

1.1.1. este demonstrată.

Dacă $r_1 \neq 0 = \exists! n_2 \in N^*: r_1 \in [a_{n_2}^{(p)}, a_{n_2+1}^{(p)})$;

$a_{n_1}^{(p)} > r_1 - n_1 > n_2$, $r_1 \neq 0$ și $a_{n_1}^{(p)} \leq k \leq a_{n_1+1}^{(p)} - 1 - 1 \leq t_1 \leq$
 $\leq p - 1$ deoarece avem $t_1 \leq (a_{n_1+1}^{(p)} - 1 - r_1) : a_n^{(p)} < p$.

Procedeul continuă în mod similar. După un număr finit de pași
 1, ajungem la $r_1 = 0$ deoarece $k = \text{finit}$, $k \in N^*$

și $k > r_1 > r_2 > \dots > r_\ell = 0$ iar între 0 și k există numai un număr finit de numere naturale distincte.

Astfel:

k se scrie în mod unic: $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + r_1, 1 \leq t_1 \leq p - 1,$

r se scrie în mod unic: $r_1 = t_2 a_{n_2}^{(p)} + r_2, n_2 < n_1,$

$$1 \leq t_2 \leq p - 1,$$

r_{l-1} se scrie în mod unic: $r_{l-1} = t_\ell a_{n_\ell}^{(p)} + r_\ell$ și $r_\ell = 0,$

$$n_\ell < n_{l-1}, 1 \leq t_\ell \leq p,$$

$\Rightarrow k$ se scrie în mod unic sub forma: $k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots +$

$$+ \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$$

cu $n_1 > n_2 > \dots > n_\ell > 0; n_\ell > 0$ deoarece $n_\ell \in \mathbb{N}^*, 1 \leq t_j \leq p - 1, j = \overline{1, \ell-1}, 1 \leq t_\ell \leq p, \ell \geq 1.$

Fie $k \in \mathbb{N}^*, k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$ cu $a_{n_i}^{(p)} = \frac{p^{n_i} - 1}{p - 1},$

$$i = \overline{1, \ell}, \ell \geq 1, n_i, t_i \in N^*, i = \overline{1, \ell}, n_1 > n_2 > \dots > n_\ell > 0$$

$$1 \leq t_j \leq p - 1, j = \overline{1, \ell-1}, 1 \leq t_\ell \leq p.$$

Construim funcția $\eta_p, p = \text{prim} > 0, \eta_p: N^* \rightarrow N^*$ astfel:

$$\forall n \in N^* \quad \eta_p(a_n^{(p)}) = p^n,$$

$$\eta_p(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}) = t_1 \eta_p(a_{n_1}^{(p)}) + \dots +$$

$$+ t_\ell \eta_p(a_{n_\ell}^{(p)}).$$

Nota 1.1.1. Funcția η_p este bine definită pentru orice număr natural.

Demonstrație:

Lema 1.1.2. $\forall k \in N^* - k$ se scrie în mod unic $k = t_1 a_{n_1}^{(p)}$

$$+ \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)} \quad \text{cu condițiile din Lema 1.1.1.} \rightarrow \exists! t_1 p^{n_1} +$$

$$+ \dots + t_\ell p^{n_\ell} = \eta_p(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}) \quad \text{și } t_1 p^{n_1} + \dots +$$

$$+ t_\ell p^{n_\ell} \in N^*.$$

Lema 1.1.3. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, p = \text{prime} \Rightarrow k = t_1 a_{n_1}^{(p)} +$

$+ \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)} \quad (\text{din Lema 1.1.2}) \quad \Rightarrow \eta_p(k) =$

$$= t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell}.$$

Se știe că $\left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{b} \right] \geq \left[\frac{a_1}{b} \right] + \dots +$
 $+ \left[\frac{a_n}{b} \right], \forall a_i, b \in \mathbb{N}^*, \text{ unde prin } [\alpha] \text{ se înțelege partea}$

întreagă a numărului α . Arătăm că suma exponenților naturali ai puterilor lui p din compunerea factorialului

$(t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell})!$ este $\geq k$;

$$\left[\frac{t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell}}{p} \right] \geq \left[\frac{t_1 p^{n_1}}{p} \right] + \dots + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p} \right] = t_1 p^{n_1-1} + \dots +$$

$$+ t_\ell p^{n_\ell-1}$$

:

$$\left[\frac{t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell}}{p^n} \right] \geq \left[\frac{t_1 p^{n_1}}{p^{n_\ell}} \right] + \dots + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_\ell}} \right] = t_1 p^{n_1-n_\ell} + \dots +$$

$$+ t_\ell p^0$$

:

$$\left[\frac{t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_1}} \right] \geq \left[\frac{t_1 p^{n_1}}{p^{n_1}} \right] + \dots + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^0 + \dots + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell}}{p^{n_1}} \right].$$

Adunând obținem că factorialul

$$\begin{aligned} \text{sumei puterilor este } &\geq t_1 (p^{n_1-1} + \dots + p^0) + \dots + \\ &+ t_\ell (p^{n_\ell-1} + \dots + p^0) = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)} = k. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.1. Funcția n_p , $p = \text{prim}$, definită anterior, are următoarele proprietăți:

- (1) $\forall k \in \mathbb{N}^*, (n_p(k))! = M_p^k$.
- (2) $\eta_p(k)$ este cel mai mic număr cu proprietatea (1).

Demonstrație:

- (1) rezultă din Lema 1.1.3.

$$(2) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, p \geq 2 - k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}$$

(vezi Lema 1.1.2) este scris în mod unic, unde:

$$n_1, t_i \in N^*, n_1 > n_2 > \dots > n_\ell > 0, a_{n_i}^{(p)} = \frac{p^{n_i} - 1}{p - 1} \in N^*,$$

$$i = \overline{1, \ell}, 1 \leq t_i \leq p - 1, j = \overline{1, \ell - 1}, 1 < t_j < p.$$

$$\begin{aligned} - \eta_p(k) &= t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell}. \text{ I note: } z = t_1 p^{n_1} + \\ &+ \dots + t_\ell p^{n_\ell}. \end{aligned}$$

Să demonstrăm că z este cel mai mic număr natural cu proprietatea (1). Presupunem prin metoda reducerii la absurd că

$$\exists \gamma \in N, \gamma < z :$$

$$\gamma! = Mp^k;$$

$$\gamma < z - \gamma \leq z - 1 - (z - 1)! = Mp^k.$$

$$z - 1 = t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell} - 1; n_1 > n_2 > \dots > n_\ell \geq 1 \text{ și}$$

$$n_j \in N, j = \overline{1, \ell};$$

$$\left[\frac{z-1}{p} \right] = t_1 p^{n_1-1} + \dots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1}-1} + t_\ell p^{n_\ell-1} - 1 \text{ cu } \left[\frac{-1}{p} \right] = -1$$

$$\text{deoarece } p \geq 2,$$

:

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_\ell}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_\ell} + \dots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1} - n_\ell} + t_\ell p^0 - 1 \text{ cu } \left[\frac{-1}{p^{n_\ell}} \right] = -1$$

$$\text{cu } p \geq 2, n_\ell \geq 1,$$

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_\ell+1}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_\ell - 1} + \dots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1} - n_\ell - 1} + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_\ell+1}} \right] =$$

$$= t_1 p^{n_1 - n_\ell - 1} + \dots + t_{\ell-1} p^{n_{\ell-1} - n_\ell - 1} \text{ deoarece}$$

$$0 < t_\ell p^{n_\ell} - 1 \leq p \cdot p^{n_\ell} - 1 < p^{n_\ell+1} \text{ cu } t_\ell < p;$$

:

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_{\ell-1}}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_{\ell-1}} + \dots + t_{\ell-1} p^0 + \left[\frac{t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_{\ell-1}}} \right] = t_1 p^{n_1 - n_{\ell-1}} +$$

$$+ \dots + t_{\ell-1} p^0 \text{ cu } n_{\ell-1} > n_\ell,$$

:

$$\left[\frac{z-1}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^0 + \left[\frac{t_2 p^{n_2} + \dots + t_\ell p^{n_\ell} - 1}{p^{n_1}} \right] = t_1 p^0.$$

$$\text{Deoarece } 0 < t_2 p^{n_2} + \dots + t_\ell p^{n_\ell} - 1 \leq (p-1) p^{n_2} + \dots +$$

$$+ (p-1)p^{n_{\ell-1}} + p \cdot p^{n_{\ell}} - 1 \leq (p-1) \cdot \sum_{i=n_{\ell-1}}^{n_2} p^i + p^{n_{\ell}+1} - 1 \leq$$

$$\leq (p-1) \frac{p^{n_2+1}}{p-1} = p^{n_2+1} - 1 < p^{n_1} - 1 < p^{n_1} -$$

$$- \left[\frac{t_2 p^{n_2} + \dots + t_{\ell} p^{n_{\ell}-1}}{p^{n_1}} \right] = 0$$

$$\left[\frac{z-1}{n_1+1} \right]_p = \left[\frac{t_1 p^{n_1} + \dots + t_{\ell} p^{n_{\ell}-1}}{p^{n_1+1}} \right] = 0 \text{ deoarece:}$$

$$0 < t_1 p^{n_1} + \dots + t_{\ell} p^{n_{\ell}} - 1 < p^{n_1+1} - 1 < p^{n_1+1}$$

conform unui raționament similar cu cel anterior.

Adunând, rezultă că suma exponenților puterilor naturale ale lui p care constituie factori ai produsului $(z-1)!$ este:

$$t_1 (p^{n_1-1} + \dots + p^0) + \dots + t_{\ell-1} (p^{n_{\ell-1}-1} + \dots + p^0) +$$

$$+ t_{\ell} (p^{n_{\ell}-1} + \dots + p^0) - 1 \cdot n_{\ell} = k - n_{\ell} < k - 1 < k \text{ deoarece}$$

$n_t > 1 = (z-1)! = Mp^k$, care contrazice presupunerea făcută.

→ $\eta_p(k)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea
 $(\eta_p(k))! = Mp^k$.

Construim o nouă funcție $\eta: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ definită după cum urmează:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(\pm 1) = 0, \\ \forall n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \text{ cu } \epsilon = \pm 1, p_i = \text{prime}, \\ p_i \neq p_j, \text{ cu } i \neq j, \alpha_i \geq 1, i = \overline{1, s}, \eta(n) = \\ = \max_{i=\overline{1, s}} (\eta_{p_i}(\alpha_i)). \end{array} \right.$$

Nota 1.1.2. η este bine definită și peste tot definită.

Demonstrație:

(a) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n \neq \pm 1, n$ este scris în mod unic, abstracție de ordinea factorilor, sub forma

$n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ cu $\epsilon = \pm 1$ unde $p_i = \text{prime}, p_i \neq p_j, \alpha_i \geq 1$ (descompunere în factori primi în inelul $\mathbb{Z}$).

- $\exists! \eta(n) = \max_{i=\overline{1, s}} (\eta_{p_i}(\alpha_i))$ cu s finit și $\eta_{p_i}(\alpha_i) \in \mathbb{N}^*$

$$\text{și } \exists \max_{i=1,s} \{ \eta_{p_i}(\alpha_i) \}$$

$$(b) \quad n = \pm 1 = \pm 1! \quad \eta(n) = 0.$$

Teorema 1.1.2. Funcția η definită anterior are următoarele proprietăți:

- (1) $(\eta(n))! = M n, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$
 (2) $\eta(n)$ este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

Demonstrație:

$$(a) \quad \eta(n) = \max_{i=1,s} \{ \eta_{p_i}(\alpha_i) \}, \quad n = \epsilon \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s},$$

$$(n = \pm 1),$$

$$(\eta_{p_1}(\alpha_1))! = M p_1^{\alpha_1},$$

:

$$(\eta_{p_s}(\alpha_s))! = M p_s^{\alpha_s}.$$

Presupunând că

$$\begin{aligned} \max_{i=1,s} \{ \eta_{p_i}(\alpha_i) \} &= \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) = (\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! = \\ &= M p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}, \quad \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) \in \mathbb{N}^* \text{ și deoarece } (p_i, p_j) = 1, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

$$- (\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! = M p_j^{\alpha_j}, \quad j = \overline{1, s}.$$

$$- (\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! = M p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}.$$

$$(b) \quad n = \pm 1 - \eta(n) = 0; \quad 0! = 1, \quad 1 = M\epsilon \cdot 1 = Mn.$$

$$(2) \quad (a) \quad n = \pm 1 - n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} - \eta(n) = \max_{i=1, s} \eta_{p_i}.$$

$$\text{Fie } \max_{i=1, s} (\eta_{p_i}(\alpha_i)) = \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}), \quad 1 \leq i \leq s;$$

$\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0})$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$$(\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}))! = M p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} - \forall \gamma \in \mathbb{N}, \quad \gamma < \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) -$$

$$\gamma! = M p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} - \gamma! = M\epsilon \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \dots p_s^{\alpha_s} = Mn$$

- $\eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0})$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea:

(b) $n = \pm 1 - \eta(n) = 0$ și este cel mai mic număr natural

$\Rightarrow 0$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$$0! = M(\pm 1).$$

Nota 1.1.3. Funcțiile η_p sunt crescătoare, neinjective, și pe $N^* - \{p^k \mid k = 1, 2, \dots\}$ sunt surjective.

Funcția η este crescătoare, neinjectivă, și surjectivă pe $Z \setminus \{0\} - N \setminus \{1\}$.

Consecința 1.1.1. Fie $n \in N^*$, $n > 4$. Atunci $n = \text{prim} \Leftrightarrow \eta(n) = n$.

Demonstrație:

" $\Rightarrow$ "

$n = \text{prim}$ și $n \geq 5 \Rightarrow \eta(n) = \eta_n(1) = n$.

" $\Leftarrow$ "

Fie $\eta(n) = n$ și să presupunem prin absurd că $n \neq \text{prim} \Rightarrow$

(a) ori $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ cu $s \geq 2$, $\alpha_i \in N^*$, $i = \overline{1, s}$,

$$\eta(n) = \max_{i=1, s} \{\eta_{p_i}(\alpha_i)\} = \eta_{p_{i_0}}(\alpha_{i_0}) < \alpha_{i_0} p_{i_0} < n$$

contrazice asumția anterioară; ori

(b) $n = p_1^{\alpha_1}$ cu $\alpha_1 \geq 2 \Rightarrow \eta(n) = \eta_{p_1}(\alpha_1) \leq p_1 \cdot \alpha_1 < p_1^{\alpha_1} = n$

deoarece $\alpha_1 \geq 2$ și $n > 4$ care contrazice ipoteza.

Aplicații:

1.1.1. Să se găsească cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$$n! = M (\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}) .$$

Soluție:

$$\eta(\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}) = \max \{ \eta_2(31), \eta_3(27), \eta_7(13) \}.$$

Să calculăm $\eta_2(31)$; formăm șirul $(a_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}^+} =$
 $= 1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$

$$31 = 1 \cdot 31 = \eta_2(31) = \eta_2(1 \cdot 31) = 1 \cdot 2^5 = 32.$$

Să calculăm $\eta_3(27)$; formăm șirul $(a_n^{(3)})_{n \in \mathbb{N}^+} =$
 $= 1, 4, 13, 40, \dots; 27 = 2 \cdot 13 + 1 = \eta_3^{(27)} = \eta_3(2 \cdot 13 + 1 \cdot 1) =$
 $= 2 \cdot \eta_3(13) + 1 \cdot \eta_3(1) = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^1 = 54 + 3 = 57.$

Să calculăm $\eta_7(13)$; formăm șirul $(a_n^{(7)})_{n \in \mathbb{N}^+} =$
 $= 1, 8, 57, \dots; 13 = 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = \eta_7(13) = 1 \cdot \eta_7(8) + 5 \cdot \eta_7(1) =$
 $= 1 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 = 49 + 35 = 84 = \eta(\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13}) = \max \{ 32, 57,$
 $84 \} = 84 = 84! = M(\pm 2^{31} \cdot 3^{27} \cdot 7^{13})$ și 84 este cel mai mic număr
 cu această proprietate.

1.2.3. Care sunt numerele ale căror factoriale se termină în
 1000 de zerouri ?

Soluție:

$n = 10^{1000}, (\eta(n))! = M10^{1000}$ și este cel mai mic număr
 cu această proprietate.

$$\eta(10^{1000}) = \eta(2^{1000} \cdot 5^{1000}) = \max \{ \eta_2(1000), \eta_5(1000) \} =$$

$$= \eta_5(1000) = \eta_5(1 \cdot 781 + 1 \cdot 156 + 2 \cdot 31 + 1) = 1 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^4 +$$

$- 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^7 = 4005$, 4005 este cel mai mic număr cu această proprietate. 4006, 4007, 4008, 4009 verifică proprietatea dar 4010 nu, deoarece $4010! = 4009! \cdot 4010$ are 1001 zerouri.

[Publicată în "An. Univ. Timișoara ", seria Șt. Matematică, Vol. XVIII, fasc. 1, pp. 79-88, 1980; vezi Mathematical Reviews: 83c : 10008.]

1.2. O infinitate de probleme nerezolvate referitoare la această funcție

& 1.2.1. Abstract:

W. Sierpinski a afirmat la un congres internațional că dacă omenirea va dura la infinit, atunci toate aceste probleme nerezolvate vor fi cândva rezolvate.

Scopul acestei lucrări este de a produce o infinitate de probleme deschise pentru a arăta că supoziția sa nu-i adevărată. Mai mult, autorul consideră că problemele deschise propuse în această lucrare nu vor fi niciodată rezolvate toate!

Orice perioadă de timp are problemele ei nerezolvate, care apar odată cu progresul științific. Numărul de probleme noi nerezolvate crește exponențial, în comparație cu cele vechi rezolvate până în prezent. Cercetări asupra unei probleme nerezolvate pot duce la alte probleme nerezolvate interesante. Cititorul este invitat să-și exprime opiniile despre aserțiunile care urmează.

& 1.2.2. Introducere.

Am construit o funcție η care asociază fiecărui întreg nenul n cel mai mic număr pozitiv m astfel încât $m!$ este multiplu al lui n . Astfel, dacă n are forma standard:

$n = \epsilon p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$, cu toți p_i numere prime distincte,
toți $a_i \in \mathbb{N}^*$, și $\epsilon = \pm 1$, atunci $\eta(n) = \max_{1 \leq i \leq r} \{\eta_{p_i}(a_i)\}$, și

$$\eta(\pm 1) = 0.$$

Acum, să definim funcțiile η : fie p un număr prim și $a \in \mathbb{N}^*$;
atunci $\eta_p(a)$ este cel mai mic întreg b astfel încât $b!$ e
multiplu al lui p^a . Construim șirul:

$$\alpha_k^{(p)} = \frac{p^k - 1}{p - 1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

avem că $\eta_p(\alpha_k^{(p)}) = p^k$, pentru orice p și orice $k = 1, 2, \dots$
... Deoarece orice $a \in \mathbb{N}^*$ se scrie în mod unic sub forma

$$a = t_1 \alpha_{n_1}^{(p)} + \dots + t_e \alpha_{n_e}^{(p)}, \quad \text{unde } n_1 > n_2 > \dots > n_e > 0,$$

și $1 \leq t_j \leq p - 1$, cu $j = 0, 1, \dots, e - 1$, și $1 \leq t_e \leq p$,

cu toți n_i, t_i din $\mathbb{N}$, am demonstrat că

$$\eta_p(a) = \sum_{i=1}^e t_i \eta_p(\alpha_{n_i}^{(p)}) = \sum_{i=1}^e t_i p^{n_i}.$$

& 1.2.3. Câteva proprietăți ale funcției η

În mod clar funcția η este pară: $\eta(-n) = \eta(n)$,

$n \in \mathbb{Z}^*$. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ atunci:

$$(1) \quad \frac{-1}{(n-1)!} \leq \frac{\eta(n)}{n} \leq 1,$$

și $\frac{\eta(n)}{n}$ este maxim dacă și numai dacă n este prim sau $n = 4$;

$\frac{\eta(n)}{n}$ este minim dacă și numai dacă $n = k!$.

În mod clar η nu este periodică. Dacă p este prim, funcțiile η_p sunt crescătoare, neinjective, dar pe $N^* - \{p^k \mid k = 1, 2, \dots\}$ ele sunt surjective. Din (1) deducem că $\eta = o(n^{\epsilon})$, $\epsilon > 0$, și $\eta = O(n)$.

Funcția η este general crescătoare pe N^* , adică:

$(\forall) n \in N^*$, $(\exists) m_0 \in N^*$, $m_0 = m_0(n)$, astfel încât pentru orice $m \geq m_0$ avem $\eta(m) \geq \eta(n)$ (și general descrescătoare pe Z^*); nu este injectivă, dar este surjectivă pe $Z \setminus \{0\} = N \setminus \{1\}$.

Numărul n este numit barieră pentru funcția teoretică numerică $f(m)$ dacă pentru orice $m < n$, $m + f(m) \leq n$ (P. Erdős și J. L. Selfridge). Are $\epsilon \eta(m)$ un număr infinit de bariere, unde $0 < \epsilon \leq 1$? [Nu, fiindcă există un $m_0 \in N$ astfel încât pentru orice $n - 1 \geq m_0$ avem $\eta(n-1) \geq \frac{2}{\epsilon} (\eta \text{ este general crescătoare}), \text{ de unde } n - 1 + \epsilon \eta(n-1) \geq n - 1.$]

$\sum_{n \geq 2} 1/\eta(n)$ este divergent, fiindcă $1/\eta(n) \geq 1/n$.

$$\eta \left(\underbrace{2 \dots 2}_k \right)^n$$

$$= 2 + \underbrace{2 \dots 2}_{k-1 \text{ ori}} \cdot 2^n$$

Demonstrație: Fie

$$a_m^{(2)} = 2^m - 1, \text{ unde } m = \underbrace{2 \dots 2}_{k-2 \text{ ori}} ;$$

$$\begin{aligned} \text{atunci } \eta \left(2^{2^m} \right) &= \eta_2 (2^m) = \eta_2 (1 + a_m^{(2)}) = \eta_2 (1) + \eta_2 (a_m^{(2)}) = \\ &= 2 + 2^m . \end{aligned}$$

& 1.2.4. Glosar de simboluri și notații

A- secvență: o secvență întreagă $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$

astfel încât nici un a_i nu este egal cu suma unor termeni distincți ai secvenței diferiți de a_i (R. K. Guy)

Ordin Mediu: dacă $f(n)$ este o funcție aritmetică și $g(n)$ este orice funcție de n astfel încât

$$f(1) + \dots + f(n) \sim g(1) + \dots + g(n)$$

spunem că $f(n)$ este de același ordin mediu ca $g(n)$;

$d(x)$: numărul divizorilor pozitivi ai lui x ;

d_x : diferența dintre două numere prime consecutive:

$$p_{x+1} - p_x ;$$

Serii Dirichlet: o serie de forma $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, s poate fi real sau complex;

Funcție Generatoare: orice funcție $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(s)$ este considerată ca o funcție generatoare pentru α_n ; forma cea mai uzuală a lui $u_n(s)$ este $u_n(s) = e^{-\lambda_n \cdot s}$ unde λ_n este o secvență de numere pozitive care crește în mod strict către infinit;

Log x : Logaritm Napierian de x în baza e;

Ordin Normal: $f(n)$ are ordinul normal $F(n)$, dacă $f(n)$ este aproximativ egală cu $F(n)$ pentru aproape toate valorile lui n , adică (2), $(\forall) \epsilon > 0, (1 - \epsilon) \cdot F(n) < f(n) < (1 + \epsilon) \cdot F(n)$ pentru aproape toate valorile lui n ; "aproape toate" valorile lui n înseamnă că numerele mai mici decât n care nu posedă proprietatea (2) sunt $o(x)$;

Condiție Lipschitz: o funcție f verifică condiția Lipschitz de ordin $\alpha \in (0, 1]$ dacă $(\exists) k > 0: |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|^\alpha$; dacă $\alpha = 1$, f este numită funcție k Lipschitz; dacă $k < 1$, f este numită funcție contractantă;

Funcție multiplicativă: o funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ cu $f(1) = 1$, și $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ unde $(m, n) = 1$;

$p(x)$: cel mai mare factor prim al lui x ;

Uniform

Distribuită: o mulțime de puncte în (a, b) este uniform distribuită dacă fiecare sub-interval al lui (a, b) conține proporția sa cotă de puncte;

Rădăcini

Incongruente: doi întregi x, y care satisfac congruența
$$f(x) \equiv f(y) \equiv 0 \pmod{m}$$

și astfel încât $x \not\equiv y \pmod{m}$;

Secvență

s-aditivă: o secvență de forma $a_1 = \dots = a_s = 1$ și $a_{m_s+1} = a_{m_1} + \dots + a_{m_s}$, $n \in N^*$ (R. Queneau);

$s(n)$: suma părților alicote (divizori ai lui n diferiți de n); $\sigma(n) = n$;

$s^k(n)$: $s(n)$ iterat de k ori;

$s^*(n)$: suma părților alicote unitare ale lui n ;

$r_k(n)$: cel mai mic număr de numere nedepășind n , care conține o progresie aritmetică de k termeni;

$\pi(x)$: numărul de numere prime nedepășind pe x ;

$\pi(x; a, b)$: numărul de numere prime nedepășind pe x și congruente cu a modulo b ;

$\sigma(n)$: suma divizorilor lui n ; $\sigma_1(n)$;

$\sigma_k(n)$: suma puterilor de ordin k ai divizorilor lui n ;

$\sigma^k(n)$: $\sigma(n)$ iterat de k ori;

$\sigma^*(n)$: suma divizorilor unitari ai lui n ;

$\varphi(n)$: funcția totient a lui Euler; numărul de numere prime nedepășind n și prime cu n ;

$\varphi^k(n)$: $\varphi(n)$ iterat de k ori;

$\bar{\varphi}(n)$: $= n \prod (1 + p^{-1})$, unde produsul este calculat după toți divizorii primi ai lui n ;

$\Omega(n)$: numărul de factori primi ai lui n , considerând și repetițiile;

$\omega(n)$: numărul de factori primi distincți ai lui n ;

$[a]$: partea întreagă inferioară a unui număr; cel mai mare întreg, mai mic decât a ;

(m, n) : c.m.m.d.c. (cel mai mare divizor comun) al lui m și n ;

$[m, n]$: c.m.m.m.c. (cel mai mic multiplu comun) al lui m și n ;

$|f|$: modulul sau valoarea absolută a lui f ;

$f(x) \sim g(x)$: $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ când $x \rightarrow \infty$; f este asimptotic cu g ;

$f(x) = o(g(x))$: $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ când $x \rightarrow \infty$;

$\left. \begin{matrix} f(x) = O(g(x)) \\ f(x) << g(x) \end{matrix} \right\}$; există a constantă c astfel încât $|f(x)| < cg(x)$, pentru orice x ;

$\Gamma(x)$: funcția lui Euler de ordinul întâi (funcția gamma) ; $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$. Deci $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Dacă $x \in \mathbb{N}^+$, $\Gamma(x) = (x-1)!$

- $\beta(x)$: funcția lui Euler de ordinul doi (funcția beta)
 $\beta : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\beta(u, v) = \frac{\Gamma(u) \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1} \cdot (1-t)^{v-1} dt;$$
- $\mu(x)$: funcția lui Mobius $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\mu(1) = 1$;
 $\mu(n) = (-1)^k$ dacă n este produsul a
 $k > 1$ prime distincte; $\mu(n) = 0$ în
celelalte cazuri;
- $\theta(x)$: funcția θ a lui Cebîșev; $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\theta(x) = \sum \log p$
unde însumarea se face după toate numerele prime p
care nu depășesc pe x ;
- $\Psi(x)$: funcția Ψ a lui Cebîșev; $\Psi(x) =$
 $= \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, cu

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{dacă } n \text{ este o putere întreagă} \\ & \text{a lui } p \text{ (cu } p \text{ prim);} \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Acest glosar poate fi continuat cu ALTE FUNCȚII (ARITMETICE).

& 1.2.5. Probleme generale nerezolvate referitoare la această funcție

- (1) Se poate reprezenta $\eta(n)$ ca o expresie numai de n ?
 - (2) Există o reprezentare asimptotică pentru $\eta(n)$?
- (Dacă da, să se determine.)

(3) Fie m un număr întreg nenul. În ce condiții $\eta(n)$ divide pe $n-m$? (Caz particular când $m = 1$.) Desigur, pentru $m = 0$ este trivial: luăm $n = k!$, sau n liber de pătrate, etc.

(4) Este η o funcție algebrică? (Dacă nu, există $\max \text{Card} \{n \in \mathbb{Z}^* \mid (\exists) p \in R[x, y], p \text{ polinom nenul, cu } p(n, \eta(n)) = 0 \text{ pentru toți } n\}$?) Mai general, introducem noțiunea: g este o funcție f dacă $f(x, g(x)) = 0$ pentru orice x , și $f \in R[x, y]$, f nenulă. Este η o f funcție? (Dacă nu, există $\max \text{Card} \{n \in \mathbb{Z}^* \mid (\exists) f \in R[x, y], f \text{ nenulă, } f(n, \eta(n)) = 0 \text{ pentru toți acești } n\}$?)

(5) Fie A o mulțime de numere întregi consecutive din $\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\max \text{Card } A$ pentru care η este monoton. De exemplu, $\text{Card } A \geq 5$, deoarece pentru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ η este respectiv 0, 2, 3, 4, 5.

(6) Un număr este numit η -algebric de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ dacă este o rădăcină a polinomului:

$$(p) \quad p_{\eta}(x) = \eta(n) x^n + \eta(n-1) x^{n-1} + \dots + \eta(1) x^1 = 0.$$

Un η -algebric câmp M este totalitatea tuturor numerelor

$$R_{\eta}(v) = \frac{A(v)}{B(v)},$$

unde v este un număr η -algebric dat, iar $A(v), B(v)$ sunt polinoame în v de forma (p) cu $B(v) \neq 0$. Să se studieze M .

(7) Există puncte $p_n = \eta(n)/n$ uniform distribuite în intervalul $(0, 1)$?

(8) Numărul 0,0234537465114..., unde șirul zecimalelor este este rațional ori irațional?

*

Este posibil să se reprezente orice număr întreg n sub forma:

(9) $n = \pm \eta(a_1)^{a_2} \pm \eta(a_2)^{a_3} \pm \dots \pm \eta(a_k)^{a_1}$, unde
 întregii $k, a_1, \dots, a_k$, și semnele sunt convenabil
 alese?

(10) Dar sub forma $n = \pm a_1^{\eta(a_1)} \pm \dots \pm a_k^{\eta(a_k)}$?

(11) Dar sub forma $n = \pm a_1^{\eta(a_2)} \pm a_2^{\eta(a_3)} \pm \dots \pm a_k^{\eta(a_1)}$?

*

Să se găsească cel mai mic k pentru care: $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ cel puțin unul
 dintre numerele $\eta(n), \eta(n+1), \dots, \eta(n+k-1)$ este:

(12) Pătrat perfect.

(13) Divizor al lui k^n .

(14) Multiplu al unui număr întreg nenul fixat p .

(15) Factorialul unui întreg pozitiv.

*

(16) Să se găsească forma generală a fracției continue
 extinse $\eta(n)/n$, pentru orice $n \geq 2$.

(17) Există numere întregi m, n, p, q , unde $m = n$ sau
 $p = q$, pentru care $\eta(m) + \eta(m+1) + \dots + \eta(m+p) = \eta(n) +$
 $+ \eta(n+1) + \dots + \eta(n+q)$?

(18) Există numere întregi m, n, p, k , cu $m = n$ și $p > 0$,
 astfel încât:

$$\frac{\eta(m)^2 + \eta(m+1)^2 + \dots + \eta(m+p)^2}{\eta(n)^2 + \eta(n+1)^2 + \dots + \eta(n+p)^2} = k ?$$

(19) Câte numere prime au forma:

$$\overline{\eta(n) \eta(n-1) \dots \eta(n-k)},$$

pentru k întreg, fixat? de exemplu:

$$\overline{\eta(2) \eta(3)} = 23, \overline{\eta(5) \eta(6)} = 53 \text{ sunt prime.}$$

(20) Să se arate că $\eta(x^n) + \eta(y^n) = \eta(z^n)$ are o infinitate de soluții întregi, pentru $n \geq 1$. De pildă, soluția (5, 7, 2048) când $n = 3$. (Asupra ultimei teoreme a lui Fermat.)
În general, ecuația diofantică
$$\sum_{i=1}^k \eta(x_i^n) = \sum_{j=1}^m \eta(y_j^n)$$

are un număr infinit de soluții.

(21) Există întregi pozitivi nenuli m, n, k , cu $m \neq 1$, n , pentru care $\eta(m \cdot n) = m^k \cdot \eta(n)$?

Desigur, η nu este homogen de ordinul k .

(22) Se pot găsi două numere distincte k, n pentru care $\log_{\eta(k^n)} \eta(n^k)$ să fie un întreg? (Baza este $\eta(k^n)$.)

(23) Fie congruența:
$$h_\eta(x) = c_n x^{\eta(n)} + \dots + c_1 \cdot x^{\eta(1)} \equiv 0 \pmod{m}.$$
 Câte soluții necongruente are h_η , considerând că $n, c_1, \dots, c_n$ sunt constante întregi date?

(24) Se știe că $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. Să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\eta(n)} / n!$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / \eta(n)!$ și eventual să se determine unele proprietăți ale acestor serii.

(25) Să se găsească ordinul mediu al lui $\eta(n)$.

(26) Să se găsească $u_\eta(s)$ pentru care $F(s)$ este o funcție generatoare a lui $\eta(n)$, și $F(s)$ are o formă cât mai simplă.

În caz particular, să se calculeze seria Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(n)/n^s,$$

cu $s \in \mathbb{R}$ (ori $s \in \mathbb{C}$).

(27) Are $\eta(n)$ un ordin normal?

(28) Se cunoaște constanta lui Euler:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Is $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \sum_{k=2}^n 1/\eta(k) - \log \eta(n) \right]$ este constantă? Dacă da,

să se calculeze.

(29) Există un m pentru care $\eta^{-1}(m) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ astfel încât numerele $a_1, a_2, \dots, a_m$ să constituie o matrice de p linii și q coloane cu suma elementelor pe fiecare linie și fiecare coloană constantă? (Caz particular când matricea este pătratică.)

*

(30) Fie $(x_n^{(s)})_{n \geq 1}$ o secvență s -aditivă.

Este posibil ca $\eta(x_n^{(s)}) = x_m^{(s)}$, $n \neq m$? Dar $x_{\eta(n)}^{(s)} = \eta(x_n^{(s)})$?

(31) Verifică η o condiție Lipschitz?

(32) Verifică η o condiție k -Lipschitz?

(33) Este η o funcție contractantă?

(34) Se poate construi o A-secvență: $a_1, \dots, a_n$ astfel încât $\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)$ să fie de asemenea o A-secvență ? Da, de exemplu 2, 3, 7, 31, Să se determine o altă A-secvență infinită.

*

Să se determine cel mai mare n astfel încât: dacă $a_1, \dots, a_n$ constituie o p -secvență, atunci și $\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)$ să constituie o p -secvență; unde p -secvență înseamnă:

(35) Progresie aritmetică.

(36) Progresie geometrică.

(37) Un sistem complet de reziduri modulo n .

Observație: fie p un număr prim, și $p, p^2, \dots, p^p$ o progresie geometrică, atunci $\eta(p^i) = ip, i \in \{1, 2, \dots, p\}$, constituie o progresie aritmetică de lungime p . În acest caz $n = \infty$.

(38) Fie secvența $a_n = \eta(n), n \geq 1$. Există o relație de recurență de forma $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots)$ pentru orice n ?

(39) Există grupuri de numere consecutive compuse $m + 1, \dots, m + n$ astfel încât și $\eta(m + 1), \dots, \eta(m + n)$ să fie numere compuse? Să se găsească cel mai mare n .

(40) Să se găsească numărul de partiții ale lui n ca sumă de $\eta(m), 2 < m \leq n$.

ALTE PROBLEME GENERALE DESCHISE REFERITOARE LA FUNCȚIA η

& 1.2.6. Probleme nerezolvate referitoare la funcția η în relații cu secvențe numerice

41-2065) Există numere întregi nenule și neprime $a_1, a_2, \dots, a_n$ în relația P, astfel încât $\eta(a_1), \eta(a_2), \dots, \eta(a_n)$ să fie în relația R? Să se găsească cel mai mare n cu această proprietate. (Desigur, toți a_i sunt distincți.) Unde P și R pot fi reprezentate de oricare din următoarele secvențe de numere:

- (1) Numere abundente; $a \in \mathbb{N}$ este abundent dacă $\sigma(a) > 2a$.
- (2) Numere aproape perfecte; $a \in \mathbb{N}$, $\sigma(a) = 2a - 1$.
- (3) Numere amicale; în acest caz luăm $n = 2$; a, b sunt numite amicale dacă $a \neq b$ și $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$.
- (4) Numere amicale mărite; în acest caz $n = 2$; a, b sunt numite amicale mărite dacă $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b - 1$ (Walter E. Beck și Rudolph M. Najar).

(5) Numere Bell: $b_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$, unde $S(n, k)$ sunt numere Stirling de ordinul doi.

(6) Numere Bernoulli (Jacques I): B_n , coeficienții dezvoltării următoarei serii infinite:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{B_1}{2!} t^2 - \frac{B_2}{4!} t^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} t^{2n} + \dots,$$

pentru $0 < |t| < 2\pi$; (aici considerăm $\lfloor 1/B_n \rfloor$).

(7) Numere Catalan: $\varphi_1 = 1, \varphi_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ pentru

$n \geq 2$.

(8) Numere Carmichael; un număr compus impar a , care este pseudoprim în baza b pentru orice b relativ prim cu a , se numește număr Carmichael

(9) Numere congruente; fie $n = 3$, și numerele a, b, c ; trebuie să avem $a \equiv b \pmod{c}$.

(10) Numere Cullen: $C_n = n \cdot 2^n + 1, n \geq 0$.

(11) C_1 -secvență de întregi; autorul introduce o secvență $a_1, a_2, \dots$ astfel încât:
 $(\forall) i \in \mathbb{N}^*, (\exists) j, k \in \mathbb{N}^*, j = i = k = j, : a_i \equiv a_j \pmod{a_k}$.

(12) C_2 -secvență de întregi; autorul introduce o secvență $a_1, a_2, \dots$ astfel încât:

$(\forall) i \in \mathbb{N}^*, (\exists) j, k \in \mathbb{N}^*, i = j = k = i, : a_j \equiv a_k \pmod{a_i}$.

(13) Numere deficiente; $a \in \mathbb{N}^*, \sigma(a) < 2a$.

(14) Numere Euler: coeficienții E_n în dezvoltarea seriei: $\sec x = \sum_{n \geq 0} E_n x^n / n!$; aici luăm $|E_n|$.

(15) Numere Fermat: $F_n = 2^{2^n} + 1, n \geq 0$.

(16) Numere Fibonacci: $f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$

$n \geq 3$.

(17) Numere Genocchi: $G_n = 2(2^{2n} - 1) B_n$, unde B_n sunt numere Bernoulli; întotdeauna $G_n \in \mathbb{Z}$.

(18) Medie harmonică; în acest caz orice termen al secvenței este medie harmonică a termenilor precedenți.

(19) Numere harmonice; un număr n se numește harmonic dacă media harmonică a tuturor divizorilor săi este un întreg (C. Pomerance).

(20) Numere heteromeice: $h_n = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(21) Numere k -hiperperfecte; a este k -hiperperfect dacă $a = 1 + \sum d_i$, unde însumarea se face după toți divizorii proprii, $1 < d_i < a$, ori $k \sigma(a) = (k+1)a + k - 1$ (Daniel Minoli și Robert Bear).

(22) Numere Kurepa; $!n = 0! + 1! + 2! + \dots + (n-1)!$

(23) Numere Lucas: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 3$.

(24) Numere norocoase: din mulțimea numerelor naturale se elimină cele pare, lăsând pe cele impare; în afară de 1, primul rămas este 3; acum se elimină fiecare al treilea număr din noua secvență; următorul număr rămas este 7; din nou se elimină de data aceasta fiecare al șaptelea număr din secvența rezultată; următorul rămas este 9; etc. (V. Gardiner, R. Lazarus, N. Metropolis, S. Ulam).

(25) Numere Mersenne: $M_p = 2^p - 1$.

(26) Numere m -perfecte; a este m -perfect dacă $\sigma^m(a) = 2a$ (D. Bode).

(27) Numere perfecte k -îndoite; a este perfect k -îndoit dacă

$$\sigma(a) = k a.$$

(28) Numere perfecte; a este perfect dacă $\sigma(a) = 2a$.

(29) Numere poligonale (reprezentate pe perimetrul unui poligon): $p_n^k = k(n - 1)$.

(30) Numere poligonale (reprezentate pe suprafața unui poligon):
$$p_n^k = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}.$$

(31) Numere abundente primitive; a este abundent primitiv dacă este abundent, și nici unul dintre divizori săi proprii nu este abundent.

(32) Numere pseudoperfecte primitive; a este pseudoperfect primitiv dacă este pseudoperfect, și nici unul dintre divizorii săi proprii nu este pseudoperfect.

(33) Numere pseudoperfecte; a este pseudoperfect dacă este egal cu suma unora dintre divizori săi proprii (W. Sierpiński).

(34) Numere pseudoprime în baza b ; a este pseudoprim în baza b dacă a este un număr compus impar pentru care $b^{a-1} \equiv 1 \pmod{a}$ (C. Pomerance, J. L. Selfridge, S. Wagstaff).

(35) Numere piramidale:
$$\pi_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2),$$

$n \in \mathbb{N}^*$.

(36) Numere pitagoreice; fie $n = 3$ și a, b, c întregi; atunci avem relația: $a^2 = b^2 + c^2$.

(37) Reziduri pătratică modulo p : numerele nenule r pentru care congruența $r \equiv x^2 \pmod{p}$ are soluții.

(38) Numere cvasi-perfecte; a este cvasi-perfectă dacă $\sigma(a) = 2a + 1$.

(39) Numere amicale reduse; considerăm $n = 2$; doi întregi a, b pentru care $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b + 1$ sunt numiți numere amicale reduse (Walter E. Beck și Rudolph M. Najar).

(40) Numere Stirling de ordinul întâi: $s(0, 0) = 1$, și $s(n, k)$ este coeficientul lui x^k din dezvoltarea $x(x-1)\dots(x-n+1)$.

(41) Numere Stirling de ordinul doi: $S(0, 0) = 1$, și $S(n, k)$ este coeficientul polinomului $x^{(k)} = x(x-1)\dots(x-k+1)$, $1 \leq k \leq n$, din dezvoltarea (care se scrie în mod unic):

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) x^{(k)}.$$

(42) Numere super-perfecte; a este super-perfectă dacă $\sigma^2(a) = 2a$ (D. Suryanarayana).

(43) Numere de neatins; a este de neatins dacă $s(x) = 1$ nu are soluții (Jack Alanen).

(44) U-numere: pornind de la numerele arbitrare u_1 și u_2 continuăm cu acele numere care se pot exprima numai într-un fel

ca suma a doi termeni distincți anteriori ai secvenței (S. M. Ulam).

(45) Numere sinistre; a este numit sinistru dacă este abundent dar nu pseudoperfect (S. J. Benkovski).

ALTE SECVENȚE NUMERICE

★

Problema nerezolvată Nr. 41 se obține luând $P = (1)$ și $R = (1)$.

Problema nerezolvată Nr. 42 se obține luând $P = (1)$ și $R = (2)$.

Problema nerezolvată Nr. 2065 se obține luând $P = (45)$ și $R = (45)$.

ALTE PROBLEME NEREZOLVATE REFERITOARE LA FUNCȚIA η ÎN RELAȚII CU SECVENȚE NUMERICE

★

& 1.2.7. Ecuații diofantice nerezolvate referitoare la funcția η

2066) Fie $0 < k \leq 1$ un număr rațional. Ecuația diofantică $\eta(n)/n = k$ are întotdeauna soluții? Să se afle toate valorile lui k pentru care această ecuație are un număr infinit de soluții. (De exemplu, dacă $k = 1/r$, $r \in \mathbb{N}^*$, atunci $n = r p_{a+h}$, $h = 1, 2, \dots$, cu toți p_{a+h} primi, și a este un index ales astfel încât $p_{a+1} > r$.)

2067) Fie $\{a_n\}_{n \geq 0}$ o secvență, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, și
 $a_{n+1} = a_{\eta(n)} + \eta(a_n)$. Există o infinitate de cupluri (m, n) ,
 $m \neq n$, pentru care $a_m = a_n$? (De exemplu $a_9 = a_{13} = 16$.)

2068) Conjectură: ecuația $\eta(x) = \eta(x-1)$ nu are nici o
 soluție.

★

Fie m, n numere întregi fixe. Să se rezolve ecuațiile diofantice
 următoare:

2069) $\eta(mx + n) = x$.

2070) $\eta(mx + n) = m + nx$.

2071) $\eta(mx + n) = x!$

2072) $\eta(x^m) = x^n$.

2073) $\eta(x)^m = \eta(x^n)$.

2074) $\eta(mx + n) = \eta(x)^y$.

2075) $\eta(x) + y = x + \eta(y)$, x și y nu sunt prime.

2076) $\eta(x) + \eta(y) = \eta(x + y)$, x și y nu prime
 gemene. (în mod general η nu este aditivă.)

2077) $\eta(x + y) = \eta(x) \cdot \eta(y)$. (în mod general η nu este
 exponențială.)

2078) $\eta(xy) = \eta(x)\eta(y)$. (în mod general η nu este
 multiplicativă.)

2079) $\eta(mx + n) = x^y$.

2080) $\eta(x)y = x\eta(y)$, x și y nu sunt prime.

2081) $\eta(x)/y = x/\eta(y)$, x și y nu sunt prime.

(în caz particular când $y = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, i.e., $\eta(x)/2^k$ este un număr
 rațional diadic.)

$$2082) \eta(x)^y = x^{\eta(y)}, \quad x \text{ și } y \text{ nu sunt prime.}$$

$$2083) \eta(x)^{\eta(y)} = \eta(x^y).$$

$$2084) \eta(x^y) - \eta(z^w) = 1, \quad \text{cu } y = 1 + w. \quad (\text{Asupra problemei lui Catalan.})$$

$$2085) \eta(x^y) = m, \quad y \geq 2.$$

$$2086) \eta(x^x) = y^y. \quad (0 \text{ soluție trivială: } x = y = 2.)$$

$$2087) \eta(x^y) = y^x. \quad (0 \text{ soluție trivială: } x = y = 2.)$$

$$2088) \eta(x) = y! \quad (\text{Un exemplu: } x = 9, y = 3.)$$

$$2089) \eta(mx) = m \eta(x), \quad m \geq 2.$$

$$2090) m^{\eta(x)} + \eta(x)^n = m^n.$$

$$2091) \eta(x^2)/m \pm \eta(y^2)/n = 1.$$

$$2092) \eta(x_1^{y_1} + \dots + x_r^{y_r}) = \eta(x_1)^{y_1} + \dots + \eta(x_r)^{y_r}.$$

$$2093) \eta(x_1! + \dots + x_r!) = \eta(x_1)! + \dots + \eta(x_r)!.$$

$$2094) (x, y) = (\eta(x), \eta(y)), \quad x \text{ și } y \text{ nu sunt prime.}$$

$$2095) [x, y] = [\eta(x), \eta(y)], \quad x \text{ și } y \text{ nu sunt prime.}$$

ALTE ECUAȚII DIOFANTICE NEREZOLVATE REFERITOARE NUMAI LA FUNCȚIA η

★

& 1.2.8. Ecuatii diofantice nerezolvate referitoare la funcția η în corelație cu alte funcții

Fie m, n numere întregi fixate. Să se rezolve următoarele
ecuații diofantice:

$$2096-2102) \eta(x) = d(mx + n)$$

$$\eta(x)^m = d(x^n)$$

$$\eta(x) + y = x + d(y)$$

$$\eta(x) \cdot y = x \cdot d(y)$$

$$\eta(x)/y = d(y)/x$$

$$\eta(x)^y = x^{d(y)}$$

$$\eta(x)^y = d(y)^x$$

2103-2221) Aceleași ecuații de mai înainte, dar substituim funcția $d(x)$ respectiv cu d_x , $p(x)$, $s(x)$, $s^k(x)$, $s^*(x)$, $r_k(x)$, $\pi(x)$, $\pi(x; m, n)$, $\sigma_k(x)$, $\sigma^k(x)$, $\sigma^*(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi^k(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\Omega(x)$, $\omega(x)$ respectively.

$$2222) \eta(s(x, y)) = s(\eta(x), \eta(y)).$$

$$2223) \eta(S(x, y)) = S(\eta(x), \eta(y)).$$

$$2224) \eta(\lfloor x \rfloor) = \lfloor \Gamma(x) \rfloor.$$

$$2225) \eta(\lfloor x - y \rfloor) = \lfloor \beta(x, y) \rfloor.$$

$$2226) \beta(\eta(\lfloor x \rfloor), y) = \beta(x, \eta(\lfloor y \rfloor)).$$

$$2227) \eta(\lfloor \beta(x, y) \rfloor) = \lfloor \beta(\eta(\lfloor x \rfloor), \eta(\lfloor y \rfloor)) \rfloor.$$

$$2228) \mu(\eta(x)) = \mu(\varphi(x)).$$

$$2229) \eta(x) = \lfloor \theta(x) \rfloor.$$

$$2230) \eta(x) = \lfloor \psi(x) \rfloor.$$

$$2231) \eta(m x + n) = A_x^n = x(x-1) \dots (x-n+1).$$

$$2232) \eta(m x + n) = A_x^m.$$

$$2233) \eta(m x + n) = \binom{x}{n} = \frac{x!}{n!(x-n)!}.$$

$$2234) \eta(m x + n) = \binom{x}{m}.$$

$$2235) \eta(m x + n) = p_x = \text{al } x\text{-lea prim.}$$

$$2236) \eta(m x + n) = \lfloor 1/B_x \rfloor.$$

$$2237) \eta(m x + n) = G_x.$$

- 2238) $\eta(m x + n)$
- 2239) $\eta(m x + n) = k_x^n.$
- 2240) $\eta(m x + n) = s(m, x).$
- 2241) $\eta(m x + n) = s(x, n).$
- 2242) $\eta(m x + n) = S(m, x).$
- 2243) $\eta(m x + n) = S(x, n).$
- 2244) $\eta(m x + n) = \pi_x.$
- 2245) $\eta(m x + n) = b_x.$
- 2246) $\eta(m x + n) = |E_x|.$
- 2247) $\eta(m x + n) = ! x.$
- 2248) $\eta(x) \equiv \eta(y) \pmod{m}.$
- 2249) $\eta(xy) \equiv x \pmod{y}.$
- 2250) $\eta(x) (x + m) + \eta(y) (y + m) = \eta(z) (z + m).$
- 2251) $\eta(m x + n) = f_x.$
- 2252) $\eta(m x + n) = F_x.$
- 2253) $\eta(m x + n) = M_x.$
- 2254) $\eta(m x + n) = c_x.$
- 2255) $\eta(m x + n) = C_x.$
- 2256) $\eta(m x + n) = h_x.$
- 2257) $\eta(m x + n) = L_x.$

Alte ecuații diofantice nerezolvate referitoare la funcția η în corelație cu alte funcții.

★

& 1.2.9. Ecuații diofantice nerezolvate referitoare la funcția η compusă cu alte funcții

2258) $\eta(d(x)) = d(\eta(x))$, x nu este prim.

2259-2275) Ecuația de mai înainte, dar în care substituim funcția $d(x)$ respectiv cu d_x , $p(x)$, ..., $\omega(x)$.

Alte ecuații diofantice nerezolvate referitoare la funcția η compusă cu alte funcții. (De exemplu:

$$\eta(\pi(4(x))) = \varphi(\eta(\pi(x))), \text{ etc.})$$

★

& 1.2.10. Inecuații diofantice nerezolvate referitoare la funcția η

Fie m , n numere întregi fixate. Să se rezolve următoarele inecuații diofantice:

2276) $\eta(x) \geq \eta(y)$.

2277) Inegalitatea $0 < \{x/\eta(x)\} < \{\eta(x)/x\}$ are loc pentru o infinitate de valori ale lui x ? unde $\{a\}$ reprezintă partea fracțională a lui a .

2278) $\eta(mx + n) < d(x)$.

2279-2300) Aceleași inecuații de mai înainte (or similare), dar substituim funcția $d(x)$ respectiv cu d_x , $p(x)$, ..., $\omega(x)$, $\Gamma(x)$, $\beta(x, x)$, $\mu(x)$, $\theta(x)$, $\Psi(x)$.

Alte inecuații diofantice nerezolvate referitoare la funcția η în corelație (or compoziție) cu alte funcții. (De exemplu:
 $\theta(\eta(\lfloor x \rfloor)) < \eta(\lfloor \theta(x) \rfloor)$, etc.)

★

& 1.2.11. Funcții aritmetice construite cu ajutorul funcției η

PROBLEME NEREZOLVATE REFERITOARE LA ACESTE

FUNCȚII NOI

I. Funcțiile $S_\eta : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $S_\eta(x) = \sum_{0 < n \leq x} \eta(n)$.

2301) $\sum_{x \geq 2} S_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

2302) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$(\underbrace{S_\eta \circ \dots \circ S_\eta}_k)(m) \geq n$, unde m, n sunt numere întregi fixate.
k times

2303-4602) Să se studieze S_η . Aceleași întrebări (ori
similare) pentru S_η ca pentru η .

II. Funcția $C_\eta : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, $C_\eta(x) = \frac{1}{x} (\eta(1) + \eta(2) +$
 $+ \dots + \eta(x))$ (suma Cesaro referitoare la funcția
 η).

4603) $\sum_{x \geq 1} C_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

4604) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$(\underbrace{C_\eta \circ \dots \circ C_\eta}_k)(m) \geq n$, unde m, n sunt numere întregi fixate.
k ori

4605-6904) Să se studieze C_η . Aceleași întrebări (ori
similare) pentru C_η ca pentru η .

III. Funcția $\Xi_\eta : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $\Xi_\eta(x) = \sum_{k=1}^{k_0} \eta^{(k)}(x)$, unde

$\eta^{(1)} = \eta$ și $\eta^{(k)} = \eta \circ \dots \circ \eta$ de k ori, și k_0 este cel mai mic întreg k pentru care $\eta^{(k-1)}(x) = \eta^{(k)}(x)$.

6905) $\sum_{x \geq 2} \Xi_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

6906) Să se afle cel mai mic x pentru care $\Xi_\eta(x) > m$,

unde m este un întreg fixat.

6907-9206) Să se studieze Ξ_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru S_η ca pentru η .

IV. Funcția $F_\eta : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$, $F_\eta(x) = \sum_{\substack{0 < p \leq x \\ p \text{ prim}}} \eta_p(x)$.

9207) $\sum_{x \geq 2} F_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

9208-11507) Să se studieze F_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru F_η ca pentru η .

V. Funcția $\alpha_\eta : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $\alpha_\eta(x) = \sum_{n=1}^x \beta(n)$, unde

$$\beta(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \eta(n) \text{ este par;} \\ 1, & \text{dacă } \eta(n) \text{ este impar.} \end{cases}$$

11508) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească cel mai mic k pentru care $(\underbrace{\alpha_\eta \circ \dots \circ \alpha_\eta}_{k \text{ ori}})(n) = 0$.

11509-13808) Să se studieze α_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru α_η ca pentru η .

VI. Funcția $m_\eta : N^* \rightarrow N$, $m_\eta(j) = a_j$, $1 \leq j \leq n$, întregi fixați, și $m_\eta(n+1) = \min_i \{ \eta(a_i + a_{n-i}) \}$, etc.

13809) $\sum_{x \geq 1} m_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

13810-16109) Să se studieze m_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru m_η ca pentru η .

VII. Funcția $M_\eta : N^* \rightarrow N$. O secvență pozitivă finită întreagă $a_1, \dots, a_n$ dată este extinsă în mod succesiv prin:

$$M_\eta(n+1) = \max_i \{ \eta(a_i + a_{n-i}) \}, \text{ etc.}$$

$$M_\eta(j) = a_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

16110) $\sum_{x \geq 1} M_\eta(x)^{-1}$ este o serie convergentă?

16111-18410) Să se studieze M_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru M_η ca pentru η .

VIII. Funcția $\eta_{\min}^{-1} : N \setminus \{1\} \rightarrow N$, $\eta_{\min}^{-1}(x) = \min \{ \eta^{-1}(x) \}$,

unde $\eta^{-1}(x) = \{ a \in N \mid \eta(a) = x \}$. De exemplu

$$\eta^{-1}(6) = \{ 2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 3^2, 3^2, 3^2 \cdot 2, 3^2 \cdot 2^2, 3^2 \cdot 2^3 \}, \text{ de unde } \eta_{\min}^{-1}(6) = 9.$$

18411) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$$\underbrace{(\eta_{\min}^{-1} \circ \dots \circ \eta_{\min}^{-1})}_{k \text{ ori}}(m) \geq n, \text{ unde } m, n \text{ sunt întregi fixați}$$

18412-20711) Să se studieze $\eta_{\min}^{-1}$. Aceleași întrebări (ori similare) pentru $\eta_{\min}^{-1}$ ca pentru η .

IX. Funcția $\eta_{\text{card}}^{-1} : N \rightarrow N$, $\eta_{\text{card}}^{-1}(x) = \text{Card}(\eta^{-1}(x))$,
unde Card înseamnă numărul de elemente al mulțimii A.

20712) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$$\left(\underbrace{\eta_{\text{card}}^{-1} \ 0 \ \dots \ 0 \ \eta_{\text{card}}^{-1}}_{k \text{ ori}} \right) (m) \geq n, \text{ unde } m, n \text{ sunt întregi fixați.}$$

20713-23012) Să se studieze η_{card}^{-1} . Aceleași întrebări (ori
similare) pentru η_{card}^{-1} ca pentru η .

X. Funcția $d_\eta : N^* \rightarrow N$, $d_\eta(x) = |\eta(x+1) - \eta(x)|$.

Fie $d_\eta^{(k+1)}(x) = |d_\eta^{(k)}(x+1) - d_\eta^{(k)}(x)|$, pentru toți $k \in N^*$,
unde $d_\eta^{(1)}(x) = d_\eta(x)$.

23013) Conjectură: $d_\eta^{(k)}(1) = 1$ ori 0 , pentru toți $k \geq 2$.

(Aceasta ne amintește de conjectura lui Gillreath asupra
numerelor prime.) De exemplu:

$\eta(1) = 0$
 $\eta(2) = 2$
 $\eta(3) = 3$
 $\eta(4) = 4$
 $\eta(5) = 5$
 $\eta(6) = 3$
 $\eta(7) = 7$
 $\eta(8) = 4$
 $\eta(9) = 6$
 $\eta(10) = 5$
 $\eta(11) = 11$
 $\eta(12) = 4$
 $\eta(13) = 13$
 $\eta(14) = 7$
 $\eta(15) = 5$
 $\eta(16) = 6$
 $\eta(17) = 17$
 $\eta(18) = 6$
 $\eta(19) = 19$
 $\eta(20) = 5$
 $\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

23014-25313) Să se studieze $d_{\eta}^{(k)}$. Aceleași întrebări (ori similare) pentru $d_{\eta}^{(k)}$ ca pentru η .

XI. Funcția $\omega_{\eta} : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $\omega_{\eta}(x)$ este numărul de m -uri, cu $0 < m \leq x$, astfel încât $\eta(m)$ divide x . Deci $\omega_{\eta}(x) \geq \omega(x)$, iar egalitate avem dacă $x = 1$ sau x este prim.

25314) Să se găsească cel mai mic k pentru care

$$\underbrace{(\omega_\eta \circ \dots \circ \omega_\eta)}_{k \text{ ori}}(x) = 0, \text{ unde } x \text{ este un întreg fixat.}$$

k ori

25315-27614) Să se studieze ω_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru ω_η ca pentru η .

XII. Funcția $M_\eta : N^* \rightarrow N$, $M_\eta(x)$ este numărul de m -uri, cu $0 < m \leq x$, astfel încât $\eta(m)$ este multiplu de m . De exemplu $M_\eta(3) = \text{Card}\{1, 3, 6, 9, 12, 27\} = 6$. Dacă p este prim, $M_\eta(p) = \text{Card}\{1, a_2, \dots, a_r\}$, atunci toți a_i , $2 \leq i \leq r$, sunt multipli de p .

27615) Fie m, n numere întregi. Să se găsească cel mai mic k pentru care $\underbrace{(M_\eta \circ \dots \circ M_\eta)}_{k \text{ ori}}(m) \geq n$.

27616-29915) Să se studieze M_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru M_η ca pentru η .

XIII. Funcția $\sigma_\eta : N^* \rightarrow N$, $\sigma_\eta(x) = \sum_{\substack{d|x \\ d>0}} \eta(d)$.

De exemplu $\sigma_\eta(18) = \eta(1) + \eta(2) + \eta(3) + \eta(6) + \eta(9) + \eta(18) = 20$, $\sigma_\eta(9) = 9$.

29916) Există o infinitate de numere neprime n astfel încât $\sigma_\eta(n) = n$?

29917-32216) Să se studieze σ_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru σ_η ca pentru η .

XIV. Funcția $\pi_\eta : N \rightarrow N$, $\pi_\eta(x)$ este numărul de n -uri cu proprietatea că $\eta(n) \leq x$. Dacă $p_1 < p_2 < \dots < p_k \leq n < p_{k+1}$ este șirul numerelor prime, pentru $i = 1, 2, \dots, k$ avem că $p_i^{a_i}$ divide pe $n!$ dar $p_i^{a_i+1}$ nu divide pe $n!$, atunci:

$$\pi_\eta(n) = (a_1 + 1) \dots (a_k + 1).$$

32217-34516) Să se studieze π_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru π_η ca pentru η .

XV. Funcția $\varphi_\eta : N^* \rightarrow N$, $\varphi_\eta(x)$ este numărul de m -uri, cu $0 < m \leq x$, având proprietatea că $(\eta(m), x) = 1$.

34517) Este întotdeauna adevărată inegalitatea $\varphi_\eta(x) < \varphi(x)$.

34518) Să se găsească x astfel încât $\varphi_\eta(x) \geq \varphi(x)$.

34519) Să se găsească cel mai mic k pentru care

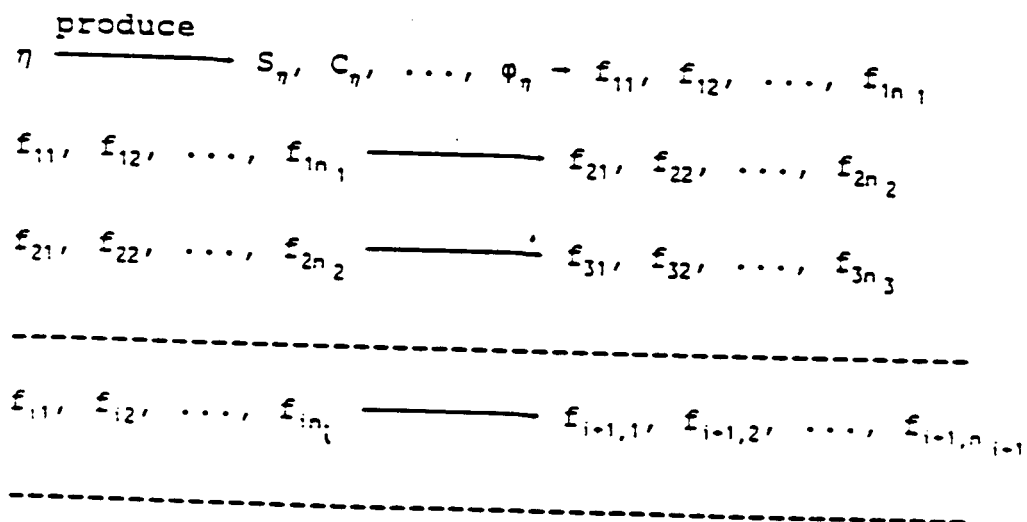
$$\underbrace{(\varphi_\eta \circ \dots \circ \varphi_\eta)}_{k \text{ ori}}(x) = 1, \text{ unde } x \text{ este un întreg fixat.}$$

34520-36819) Să se studieze φ_η . Aceleași întrebări (ori similare) pentru φ_η ca pentru η .

Alte probleme nerezolvate referitoare la aceste 15 funcții.

Alte funcții în teoria numerelor construite cu ajutorul funcției η , și noi probleme nerezolvate corelate cu ele.

36820 - ∞ . Putem continua aceste secvențe recursive și probleme deschise implicându-le la infinit. Astfel construim o infinitate de noi funcții: folosind funcțiile $S_\eta, C_\eta, \dots, \varphi_\eta$ construim funcțiile $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n_1}$ (prin diverse combinații între $S_\eta, C_\eta, \dots, \varphi_\eta$; de exemplu: $S_\eta^{(i-1)}(x) = \sum_{0 < n \leq x} S_\eta^{(i)}$ pentru $x \in N^*$, $S_\eta^{(i)} : N^* \rightarrow N$ pentru $i = 0, 1, 2, \dots$, unde $S_\eta^{(0)} = S_\eta$. Sau: $SC_\eta(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x S_\eta(n)$, $SC_\eta : N^* \rightarrow Q$, SC_η fiind o combinație între S_η și C_η ; etc.); în mod analog cu ajutorul funcțiilor $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n_1}$ construim funcțiile $f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n_2}$ etc. Metoda de obținere a unor noi funcții continuă la infinit. Pentru fiecare funcție avem cel puțin 2300 probleme nerezolvate, iar numărul acestor funcțiilor este infinit. Metoda se poate reprezenta în următorul fel:



*

Alte metode recurente de obținere a noi probleme deschise.

& 1.2.12. Concluzie:

În această lucrare autorul vrea să demonstreze că se pot construi o infinitate de probleme deschise, în special în teoria numerelor: se combină și transformă numerele până se obțin relații interesante. Unele probleme deschise s-ar putea să afecteze dezvoltări ulterioare în știință.

Lumea este în criză generală. Oare problemele nerezolvate constituie o criză matematică sau, dimpotrivă, absența lor ar duce la o stagnare intelectuală? Omenirea va avea întotdeauna probleme de rezolvat, chiar nevoită fiind să rezolve din nou (pe alte căi, și privind din alt unghi soluțiile) probleme deja rezolvate!

De exemplu, această lucrare arată că oamenii vor fi din ce în ce mai mult copleșiți de probleme fără răspuns. [E mai ușor să întrebi, decât să răspunzi.]

Aici sunt expuse probleme (ne)rezolvate care s-ajungă pentru totdeauna!! Să presupunem că s-a rezolvat o infinitate de probleme, tot va mai rămâne o altă infinitate. Nu le descondiderați ca fiind triviale ori neimportante, ele sunt foarte substanțiale.

Referințe (cărți și articole care l-au inspirat pe autor):

- Arnoux, Gabriel, Arithmétique graphique. Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques, Gauthiers-Villars, Paris, 1906.
- Blanchard, A., Initiation à la théorie analytique des nombres premiers, Dunod, Paris, 1969.
- Borevitch, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number Theory, Academic Press, New York, 1966.
- Bouvier, Alain et George Michel (sous la direction de François Le Lionnais), Dictionnaire des Mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1979.
- Carmichael, R. D., Theory of Numbers, Mathematical Monographs, No. 13, New York, Wiley, 1914.
- Chandrasekharan, K., Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, 1968.
- Davenport, H., Higher Arithmetic, London, Hutchinson, 1952.
- Dickson, L. E., Introduction to the Theory of Numbers, Chicago Univ. Press, 1929.
- Estermann, T., Introduction to Modern Prime Number Theory, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 41, 1952.
- Erdős, P., Problems and Results in Combinatorial Number Theory, Bordeaux, 1974.
- Fourrey, E., Récréations Arithmétiques, Troisième Edition, Vuibert et Nony, Paris, 1904.
- "Gamma" Journal, Unsolved Problems Corner, Brasov, 1985.

- Goodstein, R. L., Recursive Number Theory. A Development of Recursive Arithmetic in a Logic-Free Equation Calculus, North-Holland Publishing Company, 1964.
- Grosswald, Emil and Hagsis, Peter, Arithmetic Progressions Consisting Only of Primes, Math. Comput. 33, 1343-1352, 1979.
- Guy, Richard K., Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.
- Halberstam, H. and Roth, K. F., Sequences, Oxford U.P., 1966.
- Hardy, G. H. and Wright, E. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon Press, Oxford, Fifth Edition, 1984.
- Hasse, H., Number Theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1977.
- Landau, Edmund, Elementary Number Theory, with Exercises by Paul T. Bateman and Eugene E. Kohlbecker, Chelsea, New York, 1958.
- Mordell, L. J., Diophantine Equations, Academic Press, London, 1969.
- Nagell, T., Introduction to Number Theory, New York, Wiley, 1951.
- Niven, I., Irrational Numbers, Carus Math. Monographs, No. 11, Math. Assoc. of America, 1956.
- Ogilvy, C. S., Unsolved Problems for the Amateur, Tomorrow's Math., Oxford Univ. Press, New York, 1962.

Ore, O., Number Theory and Its History, McGraw-Hill, New York, 1978.

Report of Institute in the Theory of Numbers, Univ. of Colorado, Boulder, 1959.

Shanks, Daniel., Solved and Unsolved Problems in Number Theory, Spartan, Washington, D. C., 1962.

Sierpiński, W., On Some Unsolved Problems of Arithmetics, Scripta Mathematica, Vol. 25, 1960.

Smarandache, Florentin, A Function in the Number Theory *, in Analele Univ. Timisoara, Vol. XVIII, Fasc. 1, pp. 79-88, 1980; M. R. 83c: 10008.

Smarandache, Florentin, Problèmes Avec et Sans ... Problèmes!, Somipress, Fès, Morocco, 1983; M.R. 84k: 00003.

Ulam, S., A Collection of Mathematical Problems, Interscience, New York, 1960.

Vinogradov, I. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Translated by Helen Popova, Pergamon Press, London and New York, 1955.

[Prezentat la Cea de-a 14-a Convenție Anuală a Academiei Româno-Americane, care s-a desfășurat la University of Southern California, Los Angeles, SUA, între 20-22 Aprilie 1989. Un abstract al acestui articol a fost publicat de Prof.

Dr. Constantin Corduneanu, Department of Mathematics, University of Texas, Arlington, în "Libertas Mathematica", tomus IX, p. 175, The Grid, Arlington, Texas.

Alt abstract a fost publicat în Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, 1986.]

1.3. Rezolvând probleme cu ajutorul acestei funcții

Fie $n \geq 1$, $h \geq 1$, și $a \geq 2$ numere întregi. Pentru ce valori ale lui a și n , expresia $(n+h)!$ este multiplu de a^n ?
(O Generalizare a Problemei nr. 1270, Mathematics Magazine, Vol. 60, No. 3, June 1987, p. 179, propusă de Roger B. Eggleton, The University of Newcastle, Australia.)

Soluție:

(Pentru $h = 1$ se obține Problema 1270.)

& 1.3.1. Introducere

Am construit o funcție η (vezi [1]) având următoarele proprietăți:

(a) Pentru fiecare întreg nenul n , $\eta(n)!$ este multiplu de n ;

(b) $\eta(n)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea (a).

Este ușor de demonstrat că:

Lema 1.3.1. $(\forall) k, p \in \mathbb{N}^*, p \neq 1, k$ se scrie în mod unic sub forma:

$$k = t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)},$$

unde $a_{n_i}^{(p)} = (p^{n_i} - 1) / (p - 1), i = 1, 2, \dots, \ell,$

$$n_1 > n_2 > \dots > n_\ell > 0 \text{ și } 1 \leq t_j \leq p - 1, j = 1,$$

$$2, \dots, \ell - 1, 1 \leq t_\ell \leq p, n_i, t_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2,$$

$$\dots, \ell, \ell \in \mathbb{N}^*.$$

Am construit funcțiile $\eta_p, p \text{ prim} > 0, \eta_p : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*,$ astfel:

$$(\forall) n \in \mathbb{N}^*, \eta_p(a_n^{(p)}) = p^n, \text{ și}$$

$$\eta_p(t_1 a_{n_1}^{(p)} + \dots + t_\ell a_{n_\ell}^{(p)}) =$$

$$= t_1 \eta_p(a_{n_1}^{(p)}) + \dots + t_\ell \eta_p(a_{n_\ell}^{(p)}).$$

Desigur:

Lema 1.3.2.

$$(a) \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^*, \eta_p(k) \neq \mathbb{M}p^k.$$

$$(b) \quad \eta_p(k) \text{ este cel mai mic număr cu proprietatea}$$

(a). Acum construim altă funcție:

$$\eta : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \text{ definită cupă cum urmează:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(\pm 1) = 0, \\ (\forall) n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \text{ cu } \epsilon = \pm 1, p_i \text{ prime și} \\ p_i \neq p_j \text{ pentru } i \neq j, \text{ toți } \alpha_i \in \mathbb{N}^*, \eta(n) = \\ = \max_{1 \leq i \leq s} (\eta_{p_i}(\alpha_i)). \end{array} \right.$$

Nu e dificil să demonstrăm că η are proprietățile cerute în & 1.3.1.

& 1.3.2. Fie $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, cu toți $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ și toți p_i prime distincte. Din teorema anterioară rezultă că:

$$\eta(a) = \max_{1 \leq i \leq s} (\eta_{p_i}(\alpha_i)) = \eta_p(\alpha) \text{ (prin notație).}$$

Deci $\eta(a) = \eta(p^a)$, $\eta(p^a) \neq Mp^a$.

Se știe că:

$$(t_1 p^{n_1} + \dots + t_s p^{n_s}) \neq Mp^{t_1 \frac{p^{n_1}-1}{p-1} + \dots + t_s \frac{p^{n_s}-1}{p-1}}.$$

Punem:

$$t_1 p^{n_1} + \dots + t_s p^{n_s} = n + h$$

$$\text{și } t_1 \frac{p^{n_1} - 1}{p-1} + \dots + t_l \frac{p^{n_l} - 1}{p-1} = \alpha n.$$

De unde

$$\frac{1}{\alpha} \left[\frac{p^{n_1} - 1}{p-1} + \dots + t_l \frac{p^{n_l} - 1}{p-1} \right] \geq t_1 p^{n_1} + \dots + t_l p^{n_l} - h$$

sau

$$(1) \quad \alpha (p-1) h \geq (\alpha p - \alpha - 1) [t_1 p^{n_1} + \dots + t_l p^{n_l}] + \\ + (t_1 + \dots + t_l).$$

În această condiție, luăm $n_0 = t_1 p^{n_1} + \dots + t_l p^{n_l} - h$

(vezi Lema 1.3.1), deci $n = \begin{cases} n_0, & n_0 > 0; \\ 1, & n_0 \leq 0. \end{cases}$

Considerând că $a = 2$ este dat, avem un număr finit de n -uri.

Există un număr infinit de n -uri dacă și numai dacă $\alpha p - \alpha - 1 = 0$, sau $\alpha = 1$ și $p = 2$, sau $a = 2$.

& 1.3.3. Caz particular

Dacă $h = 1$ și $a = 2$, deoarece

$$t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell} \geq p^{n_\ell} > 1$$

și $t_1 + \dots + t_\ell \geq 1$, rezultă din (1) că:

$$(1') (\alpha p - \alpha) > (\alpha p - \alpha - 1) \cdot 1 + 1 = \alpha p - \alpha,$$

care-i imposibil. Dacă $h = 1$ și $a = 1$ atunci $\alpha = 1$, $p = 2$,

sau

$$(1'') 1 \geq t_1 + \dots + t_\ell,$$

$$\text{deci } \ell = 1, t_1 = 1 \text{ de unde } n = t_1 p^{n_1} + \dots + t_\ell p^{n_\ell} - h =$$

$$= 2^{n_1} - 1, n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ (soluția Problemei 1270).}$$

Exemplul 1.3.1. Fie $h = 16$ și $a = 3^4 \cdot 5^2$. Să se găsească n astfel încât

$$(n + 16)! = M \cdot 2025^n.$$

Soluție

$$\eta(2025) = \max\{\eta_3(4), \eta_5(2)\} = \max\{9, 10\} = 10 = \eta_5(2) = \eta(5^2). \text{ De unde } \alpha = 2, p = 5. \text{ Din (1) rezultă:}$$

$$128 \geq 7[t_1 5^{n_1} + \dots + t_\ell 5^{n_\ell}] + t_1 + \dots + t_\ell.$$

Deoarece $5^4 > 128$ și $7[t_1 5^{n_1} + \dots + t_\ell 5^{n_\ell}] < 128$ rezultă că

$$\ell = 1,$$

$$128 \geq 7 t_1 5^{n_1} + t_1,$$

de unde $n_1 \leq 1$, sau $n_1 = 1$, și $t_1 = 1, 2, 3$. Atunci $n_0 =$
 $= t_1 5 - 16 < 0$, deci luăm $n = 1$.

Exemplul 1.3.2.

$$(n + 7)! = M 3^n \text{ când } n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$(n + 7)! = M 5^n \text{ când } n = 1.$$

$$(n + 7)! = M 7^n \text{ când } n = 1.$$

Dar $(n + 7)! \neq M p^n$, pentru p prim > 7 , $(\forall) n \in N^*$.

$$(n + 7)! = M 2^n \text{ când}$$

$$n_0 = t_1 2^{n_1} + \dots + t_k 2^{n_k} - 7,$$

$$t_1, \dots, t_{k-1} = 1,$$

$$1 \leq t_k \leq 2, t_1 + \dots + t_k \leq 7$$

$$\text{și } n = \begin{cases} n_0, & n_0 > 0; \\ 1, & n_0 \leq 0. \end{cases}$$

etc.

Exerciții pentru cititori:

Dacă $n \in N^*$, $a \in N^* \setminus \{1\}$, să se găsească valorile lui a și n astfel încât:

$$(n + 7)! \text{ să fie multiplu de } a^n.$$

Câteva probleme deschise (vezi [2])

Să se rezolve/studieze următoarele ecuații diofantice:

(1) $\eta(x) \cdot \eta(y) = \eta(x + y)$.

(2) $\eta(x) = y!$ (O soluție: $x = 9, y = 3$).

(3) Conjectură: ecuația $\eta(x) = \eta(x + 1)$ nu are nici o soluție.

Referințe:

- [1] Florentin Smarandache, "A Function in the Number Theory,"
Analele Univ. Timisoara, Fasc. 1, Vol. XVIII, pp. 79-88,
1980, MR: 83c: 10008.
- [2] Idem, Un Infinity of Unsolved Problems Concerning a
Function in Number Theory, International Congress of
Mathematicians, Univ. of Berkeley, CA, August 3-11, 1986.

[Un comentariu dspre această generalizare a fost publicat în
"Mathematics Magazine", Vol. 61, No. 3, June 1988, p. 202:
"Smarandache a considerat problema generală de găsiere a unor
întregi pozitivi n, a , și k , astfel încât $(n + k)!$ să fie
multiplu de a^n . De asemenea, pentru întregi pozitivi p și k ,
cu p prim, el a găsit o formulă de calculare a celui mai mic
întreg $f(k)$ cu proprietatea că $(f(k))!$ este multiplu de p^k ."]]

1.4. Câteva ecuații liniare implicând această funcție

Am construit o funcție η care asociază fiecărui întreg nenul m cel mai mic număr pozitiv n astfel încât $n!$ este multiplu de m .

(a) Să se rezolve ecuația $\eta(x) = n$, unde $n \in \mathbb{N}$.

*(b) Să se rezolve ecuația $(mx) = x$, unde $m \in \mathbb{Z}$.

Discuție.

(c) Fie $\eta^{(i)} = \eta \circ \eta \circ \dots \circ \eta$ de i ori. Să se arate că există un k pentru care

$$\eta^{(k)}(m) = \eta^{(k+1)}(m) = n_m, \text{ pentru } m \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}.$$

**Să se găsească n_m și cel mai mic k cu această proprietate.

Soluție

(a) Cazurile $n = 0, 1$ sunt triviale.

Notăm secvența crescătoare de numere prime mai mici sau egale cu n prin $p_1, p_2, \dots, p_k$, și

$$\beta_t = \sum_{h \geq 1} [n/p_t^h], \quad t = 1, 2, \dots, k;$$

unde $[y]$ este cel mai mare întreg mai mic sau egal cu y .

Fie $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, unde toți p_i sunt numere prime distincte și toți α_i sunt din N .

Desigur avem că $n \leq x \leq n!$

Astfel $x = p_1^{\sigma_1} \dots p_k^{\sigma_k}$ unde $0 \leq \sigma_i \leq \beta_i$ pentru toți $i = 1, 2, \dots, k$ și există cel puțin un $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ pentru care

$$\sigma_{ij} \in \{\beta_{ij} - \beta_{ij}^{-1}, \dots, \beta_{ij} - \alpha_{ij} + 1\}.$$

în mod clar $n!$ este multiplu de x , și este cel mai mic.

(b) Vezi de asemenea [1]. Considerăm $m \in N^*$.

Lema 1.4.1. $\eta(m) \leq m$, și $\eta(m) = m$ dacă și numai dacă $m = 4$ sau m este prim.

Desigur $m!$ este multiplu al lui m .

Dacă $m \neq 4$ și m nu este prim, lema este echivalentă cu: există m_1, m_2 astfel încât $m = m_1 \cdot m_2$ cu $1 < m_1 \leq m_2$ și $(2m_2 < m \text{ or } 2m_1 < m)$. De unde $\eta(m) \leq 2m_2 < m$, respectiv $\eta(m) \leq \max\{m_2, 2m_1\} < m$.

Lema 1.4.2. Fie p prim ≥ 5 . Atunci $\eta(px) = x$ dacă și numai dacă x este prim $> p$, ori $x = 2p$.

Demonstrație. $\eta(p) = p$. Deci $x > p$.

În mod analog: x nu este prim și $x = 2p \cdot x = x_1 \cdot x_2$, $1 < x_1 \leq x_2$ și $(2x_2 < x_1, x_2 = p_1, \text{ și } 2x_1 < x) = \eta(px) \leq$

$\leq \max \{p, 2x_2\} < x$ respectiv $\eta(p \cdot x) \leq \max \{p, 2x_1, x_2\} < x$.

Observații:

$\eta(2x) = x - x = 4$ sau x este număr prim impar.

$\eta(3x) = x - x = 4, 6, 9$ sau x este număr prim > 3 .

Lema 1.4.3. Dacă $(m, x) = 1$ atunci x este prim $\eta(m)$.

Desigur, $\eta(mx) = \max \{\eta(m), \eta(x)\} = \eta(x) = x$.

Și $x = \eta(m)$, deoarece dacă $x = \eta(m)$ atunci $m \cdot \eta(m)$ divide pe $\eta(m)!$ adică m divide pe $(\eta(m) - 1)!$ de unde $\eta(m) \leq \eta(m) - 1$.

Lema 1.4.4. Dacă x nu este prim atunci $\eta(m) < x \leq 2\eta(m)$

și $x = 2\eta(m)$ dacă și numai dacă $\eta(m)$ este prim.

Demonstrație: Dacă $x > 2\eta(m)$ există x_1, x_2 cu $1 < x_1 \leq x_2$, $x = x_1 x_2$. Pentru $x_1 < \eta(m)$ avem că $(x - 1)!$ este multiplu de mx . Demonstrație similară pentru celelalte cazuri.

Fie $x = 2\eta(m)$; dacă $\eta(m)$ nu este prim, atunci $x = 2ab$, $1 < a \leq b$, dar produsul $(\eta(m) + 1)(\eta(m) + 2) \dots (2\eta(m) - 1)$ se divide la x .

Dacă $\eta(m)$ este prim, $\eta(m)$ divide pe m , de unde $m \cdot 2\eta(m)$ se divide cu $\eta(m)^2$, rezultă că $\eta(m \cdot 2\eta(m)) \geq 2 \cdot \eta(m)$, dar $(\eta(m) + 1)(\eta(m) + 2) \dots (2\eta(m))$ este multiplu de $2\eta(m)$, adică $\eta(m \cdot 2\eta(m)) = 2\eta(m)$.

Concluzie

Orice număr prim $x > \eta(m)$, este soluție.

Dacă $\eta(m)$ este prim, atunci $x = 2 \eta(m)$ este o soluție.

*Dacă x nu e prim, $\eta(m) < x < 2 \eta(m)$, și x nu divide pe $(x-1)!/m$ atunci x este o soluție (chestiune semi-deschisă). Dacă $m = 3$ se adaugă și $x = 9$. (Nu mai există nici o altă soluție.)

(c)

Lema 1.4.5. $\eta(a \cdot b) \leq \eta(a) + \eta(b)$.

Desigur, $\eta(a) = a'$ și $\eta(b) = b'$ implică $(a' + b')! = b'! (b' + 1) \dots (b' + a')$. Fie $a' \leq b'$. Atunci $\eta(ab) \leq a' + b'$, deoarece produsul unor a' întregi consecutivi este multiplu de $a'!$

Evident, dacă m este prim, atunci $k = 1$ și $n_m = m$.

Dacă m nu este prim, atunci $\eta(m) < m$, de unde rezultă că există k pentru care $\eta^{(k)}(m) = \eta^{(k-1)}(m)$.

Dacă $m = 1$ atunci $2 \leq n_m \leq m$.

Lema 1.4.6. $n_m = 4$ ori n_m este prim.

Dacă $n_m = n_1 n_2$, $1 < n_1 \leq n_2$, atunci $\eta(n_m) < n_m$. Absurd.
 $n_m = 4$.

(**) Această chestiune rămâne deschisă.

Referință:

- [1] F. Smarandache, A Function in the Number Theory, An.
Univ. Timisoara, seria st. mat., Vol. XVIII, fasc. 1,

pp. 79-88, 1980; Mathematical Reviews: 83c: 10008.

[Publicat în revista "Gamma", Braşov, 1987.]

2. ALTĂ FUNCȚIE ÎN TEORIA NUMERELOR

În această lucrare definim o funcție L care ne va permite să generalizăm (separat sau simultan) câteva teoreme din Teoria Numerelor obținute de Wilson, Fermat, Euler, Gauss, Lagrange, Leibnitz, Moser și Sierpinski.

§ 2.1. Fie A mulțimea $\{m \in \mathbb{Z} / m = \pm p^\beta, \pm 2 p^\beta, p - \text{prim impar}, \beta \in \mathbb{N}^* \text{ sau } m = \pm 2^\alpha, \alpha = 0, 1, 2 \text{ sau } m = 0\}$.

Fie $m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, cu $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ numere prime pozitive distincte.

Considerăm funcția $L: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$,

$L(x, m) = (x - c_1) \dots (x - c_{\varphi(m)})$, unde $c_1, \dots, c_{\varphi(m)}$ sunt toate restricțiile modulo m , relativ prime cu m și φ este funcția Euler.

Dacă toate numerele prime distincte ce divid x și m simultan sunt $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$ atunci:

$$L(x, m) \equiv \mp 1 \left(\text{mod } p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \right), \text{ când } m \in A, \text{ respectiv } m \notin A \text{ și}$$

$$L(x, m) \equiv 0 \left(\text{mod } m / \left(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \right) \right). \text{ Pentru } d = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \text{ și } m' = m / d$$

găsim

$$L(x, m) \equiv \mp 1 + k_1^0 d \equiv k_2^0 m' \pmod{m},$$

unde k_1^0, k_2^0 constituie o soluție particulară întreagă a ecuației diofantice

$$k_2 m' - k_1 d = \mp 1 \quad (\text{semnele sunt alese după apartenența lui } m \text{ la } A).$$

Acest rezultat generalizează teorema Gauss

$$c_1 \dots c_{\varphi(m)} \equiv \mp 1 \pmod{m}, \text{ când } m \in A, \text{ respectiv } m \notin A \text{ (vezi [1])},$$

care la rândul ei generalizează teorema Wilson $p - \text{prim} \Rightarrow (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Demonstrație:

Următoarele două leme sunt triviale:

Lema 2.1. Dacă $c_1, \dots, c_{\phi(p^\alpha)}$ sunt toate resturile modulo p^α relativ prime cu p^α , unde p este întreg și $\alpha \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru $k \in \mathbb{Z}$ și $\beta \in \mathbb{N}^*$ $k p^\beta - c_1, \dots, k p^\beta - c_{\phi(p^\alpha)}$ sunt de asemenea toate resturile modulo p^α , relativ prim cu p^α . Este suficient să demonstrăm că pentru $1 \leq i \leq \phi(p^\alpha)$ avem $k p^\beta - c_i$ relativ prime cu p^α , ceea ce este evident.

Lema 2.2. Dacă $c_1, \dots, c_{\phi(m)}$ sunt toate resturile modulo m , relativ prime cu m și $p_i^{\alpha_i}$ divide m și $p_i^{\alpha_i+1}$ nu divide m , atunci $c_1, \dots, c_{\phi(m)}$ constituie $\phi(m/p_i^{\alpha_i})$ sisteme reduse de resturi modulo $p_i^{\alpha_i}$.

Lema 2.3. Dacă $c_1, \dots, c_{\phi(q)}$ sunt resturile modulo q relativ prime cu b și $(b, q) \sim 1$ atunci $b + c_1, \dots, b + c_{\phi(q)}$ conține un reprezentant al clasei $\hat{0}$ modulo q . Desigur, deoarece $(b, q - b) \sim 1$ va exista $c_{i_0} = q - b$, deci $b + c_{i_0} = M_q$. De aici avem:

Teorema 2.1. Dacă $\left(x, m / \left(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}\right)\right) \sim 1$ atunci

$$(x - c_1) \dots (x - c_{\phi(m)}) \equiv 0 \left(\text{mod } m / \left(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}\right) \right)$$

Lema 2.4. Deoarece $c_1, \dots, c_{\phi(m)} \equiv \mp 1 \pmod{m}$ rezultă că $c_1, \dots, c_{\phi(m)} \equiv \mp 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $\forall i$, când $m \in A$, respectiv $m \in A$.

Lema 2.5. Dacă p_i divide x și m simultan, atunci $(x + c_1) \dots (x + c_{\phi(m)}) \equiv \mp 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $m \in A$, respectiv $m \in A$. Desigur, din lemele 2 și 1, respectiv 4 avem:

$$(x - c_1) \dots (x - c_{\phi(m)}) \equiv c_1 \dots c_{\phi(m)} \equiv \mp 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Din lema 2.5 obținem:

Teorema 2.2. Dacă $p_{i_1} \dots p_{i_r}$ sunt toate numerele prime ce divid x și m simultan.

atunci $(x + c_1) \dots (x + c_{\varphi(m)}) \equiv \mp 1 \pmod{p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}}}$, când $m \in A$, respectiv $m \notin A$.

Din teoremele 1 și 2 rezultă $L(x, m) = \mp 1 + k_1 d = k_2 m'$ unde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Deoarece $(d, m') \sim 1$, ecuația diofantică $k_2 m' - k_1 d = \mp 1$ admite soluții întregi (necunoscutele fiind k_1, k_2). Astfel $k_1 = m' t - k_1^0$ și $k_2 = dt - k_2^0$, cu $t \in \mathbb{Z}$ și k_1^0, k_2^0 o soluție întreagă particulară a ecuației. Astfel:

$$L(x, m) \equiv \mp 1 - m' dt + k_1^0 d \equiv \mp 1 - k_1^0 d \pmod{m}$$

sau

$$L(x, m) \equiv k_2^0 m' \pmod{m}.$$

& 2.2. Aplicații

1. Lagrange a extins teorema lui Wilson astfel:

"dacă p este prim, atunci $x^{p-1} - 1 = (x - 1)(x + 2) \dots (x + p-1) \pmod{p}$ ".

Vom extinde acest rezultat astfel:

Oricare ar fi $m = 0, \pm 4$ avem pentru $x^2 + s^2 = 0$ și dacă m e prim atunci $(x, m) \neq m$;

$$x^{\varphi(m_s) + s} - x^s = (x + 1)(x + 2) \dots (x + |m| - 1) \pmod{m}, \text{ unde } m_s \text{ și } s \text{ sunt obținute din}$$

algoritmul:

$$(0) \begin{cases} x = x_0 d_0; & (x_0, m_0) \sim 1 \\ m = m_0 d_0; & d_0 \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_0 = d_0^1 d_1; & (d_0^1, m_1) \sim 1 \\ m_0 = m_1 d_1; & d_1 \neq 1 \end{cases}$$

$$(s-1) \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^1 d_{s-1}; & (d_{s-2}^1, m_{s-1}) \sim 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1}; & d_{s-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^1 d_s; & (d_{s-1}^1, m_s) \sim 1 \\ m_{s-1} = m_s d_s; & d_s = 1 \end{cases}$$

(vezi [3] sau [4]). Pentru m pozitiv prim, avem $m_s = m$, $s = 0$ și $\varphi(m) = m - 1$, adică Lagrange.

2. L. Moser a enunțat următoarea teoremă:

"dacă p este prim atunci $(p-1)! a^p + a = M p$ " și Sierpinski (vezi [2], pag 57) "dacă p este prim atunci $a^p + (p-1)! a = M p$ " care reunesc teoremele Wilson și Fermat în una singură.

Funcția L și algoritmul din §2 ne vor ajuta să le generalizăm astfel: "dacă a și m sunt întregi, $m \neq 0$ și $c_1, \dots, c_{\varphi(m)}$ sunt toate resturile modulo m , relativ prime cu m , atunci:

$$c_1 \dots c_{\varphi(m)} a^{\varphi(m_s)+s} - L(0, m) a^s = M m,$$

respectiv

$$-L(0, m) a^{\varphi(m_s)+s} + c_1 \dots c_{\varphi(m)} a^s = M m,$$

sau mai mult:

$$(x - c_1) \dots (x - c_{\varphi(m)}) a^{\varphi(m_s)+s} - L(x, m) a^s = M m,$$

respectiv

$$-L(x, m) a^{\varphi(m_s)+s} + (x - c_1) \dots (x - c_{\varphi(m)}) a^s = M m,$$

care reunesc Fermat, Euler, Wilson, Lagrange și Moser (respectiv Sierpinski).

3. Autorul a mai obținut o generalizare a rezultatelor lui Moser și Sierpinski (vezi [6], problema 7. 140, pag 173-174) astfel: "dacă m este întreg pozitiv, $m \neq 0, -4$ și a întreg, atunci $(a^m - a)(m-1)! = M m$ " reunind teoremele Wilson și Fermat în alt mod.

4. Leibnitz a enunțat că "dacă p este prim atunci $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$ "; noi considerăm " $c_i < c_{i+1} \pmod{m}$ " dacă $c'_i < c'_{i+1}$, unde $0 \leq c'_i < [m]$, $0 \leq c'_{i+1} < [m]$, și $c_i \equiv c'_i \pmod{m}$; $c_{i+1} \equiv c'_{i+1} \pmod{m}$; se vede ușor că dacă $c_1, c_2, \dots, c_{\varphi(m)}$ sunt resturile modulo m , relativ prime cu m ($c_i < c_{i+1} \pmod{m}$, $\forall i$, $m \neq 0$) atunci $c_1 c_2 \dots c_{\varphi(m)-1} \equiv 1 \pmod{m}$, când $m \in A$, respectiv $m \in A$, deoarece $c_{\varphi(m)} \equiv -1 \pmod{m}$.

Referințe:

- 1 Lejeune-Dirichlet. "Vorlesungen über Zahlentheorie". 4te Auflage, Braunschweig; 1894, §38.
- 2 Sierpinski, Wacław. "Ce știm și ce nu știm despre numerele prime", Ed. Științifică, București, 1966.

- 3 Smarandache, Florentin, "O generalizare a teoremei lui Euler referitoare la congruente". Bulet. Univ. Braşov, seria c. Vol. XXIII, pp. 7-12, 1981; vezi Mathematical Reviews: 84 j: 10006.
- 4 Smarandache, Florentin, "Généralisations et Généralités." Ed. Nouvelle, Fes, Morocco, pp. 9-13, 1984.
- 5 Smarandache, Florentin, "A function in the number theory," An. Univ. Timişoara, seria şt. mat., Vol. XVIII, fasc. 1 pp. 79-88, 1980; vezi M.R.: 83c: 10008.
- 6 Smarandache, Florentin, "Problèmes avec et sans ... problèmes!", Somipress, Fes, Morocco, 1983; vezi M.R.: 84k: 00003.

3. FUNCȚII PRIME ÎN TEORIA NUMERELOR

& 3.1. Vom construi o clasă de funcții, definite astfel:

$$P_1 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, P_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ este prim;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

De exemplu $P_1(2) = P_1(3) = P_1(5) = \dots = 0$,
pe când $P_1(0) = P_1(1) = P_1(4) = \dots = 1$.

În general, pentru un întreg dat $k \geq 1$, se poate defini:

$$P_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\},$$

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ sunt toate prime;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Mai departe, să studiem în ce condiții $P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = 0$, sau să determinăm condiții necesare și suficiente astfel încât n întregi, primi între ei doi câte doi, să fie simultan primi.

Aceasta generalizează teoremele lui V. Popa [3], I. Cucurezeanu ([1], p. 165), Clement, S. Patricio [2], etc.

În mod particular această Teoremă Generală oferă diferite caracterizări pentru numerele prime gemene, quadruple,

etc.

& 3.2. Introducere. Este evidentă următoarea

Lema 3.1. Fie A, B întregi nenuli. Atunci:

$$AB \equiv 0 \pmod{pB} \iff A \equiv 0 \pmod{p} \iff A/p \text{ este număr întreg.}$$

Lema 3.2. Fie $(p, q) = 1$, $(a, p) = 1$, $(b, q) = 1$.

Atunci:

$$A \equiv 0 \pmod{p} \text{ și } B \equiv 0 \pmod{q} \iff aAq + bBp \equiv 0 \pmod{pq} \iff aA + bBp/q \equiv 0 \pmod{p} \iff aA/p + bB/q \text{ este număr întreg.}$$

Demonstrație:

Prima echivalență:

Avem $A = K_1p$ și $B = K_2q$, cu $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}$, deci

$$aAq + bBp = (aK_1 + bK_2) pq.$$

Reciproc: $aAq + bBp = Kpq$, cu $K \in \mathbb{Z}$, rezultă
 că $aAq \equiv 0 \pmod{p}$ și $bBp \equiv 0 \pmod{q}$, dar din presupunerea
 anterioară obținem $A \equiv 0 \pmod{p}$ și $B \equiv 0 \pmod{q}$.

A doua și a treia echivalență rezultă din lema

3.1.

Prin inducție extindem această leamnă la

Lema 3.3. Fie $p_1, \dots, p_n$ coprime două câte două,
 și fie $a_1, \dots, a_n$ numere întregi astfel încât
 $(a_i, p_i) = 1$ pentru orice i . Atunci:

$$A_1 \equiv 0 \pmod{p_1}, \dots, A_n \equiv 0 \pmod{p_n} -$$

$$- \sum_{i=1}^n a_i A_i \prod_{j=1}^n p_j \equiv 0 \pmod{p_1 \dots p_n} -$$

$$- (P/D) \cdot \sum_{i=1}^n (a_i A_i / p_i) \equiv 0 \pmod{P/D},$$

unde $P = p_1 \dots p_n$ și D este un divizor al lui p

$$- \sum_{i=1}^n a_i A_i / p_i \text{ este număr întreg.}$$

& 3.3. Din această leamnă putem să deducem imediat o

TEOREMĂ GENERALĂ:

Fie p_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, numere întregi coprime
 două câte două, și fie $r_1, \dots, r_n$, $a_1, \dots, a_n$ numere întregi
 astfel încât a_i să fie coprim cu r_i pentru orice i .

Se consideră următoarele condiții:

(i)

$p_{i1}, \dots, p_{im_i}$ sunt simultan prime dacă și numai dacă $c_i \equiv 0 \pmod{r_i}$, pentru orice i .

Atunci:

Numerele p_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, sunt simultan prime dacă și numai dacă

$$(*) \quad (R/D) \sum_{i=1}^n (a_i c_i / r_i) \equiv 0 \pmod{R/D},$$

unde $R = \prod_{i=1}^n r_i$ și D este un divizor al lui R .

Observație:

Adesea în condițiile (i) modulul r_i este egal cu

$\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}$, ori cu un divizor al acestuia, și în acest caz

relația Teoremei Generale devine:

$$(P/D) \sum_{i=1}^n (a_i c_i / \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}) \equiv 0 \pmod{P/D},$$

unde

$$P = \prod_{i,j=1}^{n, m_i} p_{ij} \text{ și } D \text{ este un divizor al lui } P.$$

Corolarii:

Obținem ușor că ultima relație este echivalentă
cu:

$$\sum_{i=1}^n a_i c_i \quad (P / \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}) \equiv 0 \pmod{P},$$

și

$$\sum_{i=1}^n (a_i c_i / \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}) \text{ este număr întreg,}$$

etc.

Restricțiile impuse pentru numerele p_{ij} din Teorema Generală sunt foarte largi, deoarece dacă ar fi două numere distincte necoprimi, atunci cel puțin unul dintre acestea n-ar fi prim, deci cele $m_1 + \dots + m_n$ numere n-ar mai putea fi prime toate (simultan).

Teorema Generală are multe variante, în concordanță cu valorile atribuite parametrilor $a_1, \dots, a_n$, și $r_1, \dots, r_m$, precum și parametrului D , dar și în concordanță cu congruențele $c_1, \dots, c_n$ care caracterizează fie numai un număr prim fie mai multe în același timp. Putem porni de la teoreme (condiții c_i), care caracterizează un singur număr prim [vezi Wilson, Leibniz, Smarandache [4], sau Simionov (p este prim dacă și numai dacă

$(p-k)!(k-1)! - (-1)^k \equiv 0 \pmod{p}$, când $p \geq k \geq 1$; aici, este
 preferabil să luăm $k = \lfloor (p+1)/2 \rfloor$, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă
 cel mai mare întreg $\leq x$, pentru ca numărul
 $(p-k)!(k-1)!$ să fie cât mai mic posibil] pentru a obține, cu
 ajutorul Teoremei Generale, condițiile c_j' , care
 caracterizează mai multe numere prime în mod simultan.
 După aceea, din condițiile c_i, c_j' , folosind Teorema
 Generală din nou, obținem condiții noi c_h'' care
 caracterizează numerele prime în mod simultan. Și
 această metodă poate fi continuată în mod analog.

Observații

Fie $m_i = 1$ iar c_i reprezintă teorema lui Simionov
 pentru orice i .

(a) Dacă $D = 1$ rezultă teorema lui V. Popa, care
 generalizează teorema lui Cucurezeanu, și care la rândul ei
 generalizează teorema lui Clement.

(b) Dacă $D = P/p_2$ și alegând în mod convenient
 parametrii a_i, k_i pentru $i = 1, 2, 3$, rezultă teorema lui
 S. Patricio.

Câteva exemple:

3.1. Fie $P_1, P_2, \dots, P_n$ numere întregi pozitive > 1 ,
 coprime două câte două, și $1 \leq k_i \leq p_i$ pentru orice i .
 Atunci:

$p_1, p_2, \dots, p_n$ sunt în mod simultan prime dacă și numai dacă:

$$(T) \quad \sum_{i=1}^n [(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] \cdot \prod_{j=i}^n p_j \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \dots p_n}$$

ori

$$(U) \quad \left(\sum_{i=1}^n [(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] \prod_{j=i}^n p_j \right) / (p_{s+1} \dots p_n) \equiv 0 \pmod{p_1 \dots p_s}$$

ori

$$(V) \quad \sum_{i=1}^n [(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] p_i / p_i \equiv 0 \pmod{p_i}$$

ori

$$(W) \quad \sum_{i=1}^n [(p_i - k_i)! (k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] / p_i \text{ este un număr întreg.}$$

3.2. Alt exemplu, folosind altă relație (prima teoremă din [4]): p este un număr prim pozitiv dacă și numai dacă $(p-3)! - (p-1)/2 \equiv 0 \pmod{p}$.

$$\sum_{i=1}^n [(p_i - 3)! - (p_i - 1)/2] p_i / p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

3.3. Numerele impare p și $p + 2$ sunt prime gemene dacă și numai dacă:

$$(p-1)!(3p+2) + 2p + 2 \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$$

sau

$$(p-1)!(p-2)-2 \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$$

sau

$[(p-1)! + 1] / p + [(p-1)! 2 + 1] / (p+2)$ este un număr întreg.

Aceste caracterizări de numere prime gemene diferă de cea a lui Clement: $((p-1)!4 + p + 4 \equiv 0 \pmod{p(p+2)})$.

3.4. Fie $(p, p+k) = 1$, atunci p și $p + k$ sunt prime în mod simultan dacă și numai dacă $(p-1)!(p+k) + (p+k-1)! p + 2p + k \equiv 0 \pmod{p(p+k)}$, relație care diferă de cea a lui Cucurezeanu ([1], p. 165): $k.k! [(p-1)!+1] + [k! - (-1)^k] p \equiv 0 \pmod{p(p+k)}$.

3.5. Iată o caracterizare de numere prime cuadrupe $p, p + 2, p + 6, p + 8$: $[(p-1)!+1]/p + [(p-1)!2!+1]/(p+2) + [(p-1)!6!+1]/(p+6) + [(p-1)!8!+1]/(p+8)$ este un întreg.

3.6. Pentru $p \geq 2$, $p, p + 4$ numere întregi coprime două câte două găsim relația: $(p-1)!+p[(p-3)!+1]/$

$$\frac{1}{(p-2)+p[(p+3)!+1]} \equiv -1 \pmod{p},$$
 care diferă de cea a lui Patricio $(8[(p+3)!/(p+4)] + 4[(p-3)!/(p-2)] \equiv -11 \pmod{p})$.

Referințe:

- [1] Cucurezeanu, I.--Probleme de aritmetică și teoria numerelor, Ed. Tehnică, București, 1966.
- [2] Patrizio, Serafino--Generalizzazione del teorema di Wilson alle terne prime, Enseignement Math., Vol. 22(2), nr. 3-4, pp. 175-184, 1976.
- [3] Popa, Valeriu--Asupra unor generalizări ale teoremei lui Clement, Studii și cercetari matematice, vol. 24, nr. 9, pp. 1435-1440, 1972.
- [4] Smarandache, Florentin--Criterii ca un număr natural să fie prim, Gazeta Matematică, nr. 2, pp. 49-52; 1981; see Mathematical Reviews (USA): 83a: 10007.

[Prezentat la Cea de-a 15-a Convenție Anuală a Academiei Româno-Americane, care a avut loc în Montréal, Québec, Canada, între 14-18 iunie, 1990, la École Polytechnique de Montréal.]

4. ASUPRA FUNCȚIEI TOTIENT A LUI EULER ÎN TEORIA NUMERELOR

Funcția totient (ori phi-) a lui Euler este definită astfel: pentru orice întreg x , $\phi(x)$ este numărul de întregi primi cu x și mai mici decât x ; sau numărul claselor reduse de resturi modulo x .

În continuare vom studia o conjectură referitoare la această funcție.

4.1. O proprietate a unui contraexemplu al conjecturei lui Carmichael referitoare la funcția totient a lui Euler

Conjectura lui Carmichael este următoarea: "Ecuația $\phi(x) = n$ nu poate avea o soluție unică, $(\forall) n \in \mathbb{N}$; unde ϕ este funcția lui Euler". R. K. Guy a expus în [1] câteva rezultate asupra acesteia: Carmichael însuși a demonstrat ca dacă n_0 nu verifică conjectura, atunci $n_0 > 10^{37}$; V. L. Klee [2] a îmbunătățit rezultatul la $n_0 > 10^{400}$, și Masai & A. Valette [3] l-a mărit la 10^{10000} , C. Pomerance [4] scris despre aceasta de asemenea.

În lucrarea de față vom demonstra că ecuația $\phi(x) = n$ admite un număr finit de soluții, vom determina forma generală a acestor soluții, și vom demonstra că dacă x_0 este soluție unică a ecuației de mai sus (pentru un n fixat), atunci x_0 este multiplu de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2$ și din [3] $x_0 > 10^{10000}$.

& 4.1.1. Fie x_0 o soluție a ecuației $\phi(x) = n$.

Se consideră n fixat. Încercăm să construim altă soluție $y_0 \neq x_0$.

Prima metodă:

Descompunem pe $x_0 = a \cdot b$, cu a, b întregi, astfel încât

$(a, b) = 1$; căutăm un $a' \neq a$ astfel încât $\phi(a') =$

$\phi(a)$ și $(a', b) = 1$; rezultă că $y_0 = a' \cdot b$.

A doua metodă:

fie $x_0 = q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$, cu toți $\beta_i \in \mathbb{N}^*$, și $q_1, \dots, q_r$ sunt numere prime distincte două câte două; căutăm un întreg q astfel încât $(q, x_0) = 1$ și $\varphi(q)$ divide pe $x_0 / (q_1 \dots q_r)$; atunci $y_0 = x_0 q / \varphi(q)$.

Observăm imediat că putem lua pe q prim. Autorul conjecturează că pentru orice întreg $x_0 \geq 2$ este posibil să găsim, cu ajutorul uneia dintre aceste metode, un $y_0 = x_0$ astfel încât $\varphi(y_0) = \varphi(x_0)$.

Lema 4.1.1. Ecuația $\varphi(x) = n$ admite un număr finit de soluții $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație:

Cazurile $n = 0, 1$ sunt triviale. Considerăm n fixat, $n \geq 2$. Fie $p_1 < p_2 < \dots < p_s \leq n + 1$ secvența numerelor prime. Dacă x_0 este o soluție a ecuației anterioare, atunci x_0 are forma $x_0 = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, cu toți $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Fiecare α_i este limitat, deoarece:

$$(\forall) i \in \{1, 2, \dots, s\}, (\exists) a_i \in \mathbb{N} : p_i^{a_i} \geq n.$$

De unde $0 \leq \alpha_i \leq a_i + 1$, pentru orice i . Astfel, găsim o limită extinsă pentru numărul de soluții: $\prod_{i=1}^s (a_i + 2)$.

Lema 4.1.2. Orice soluție a acestei ecuații este de forma

(1) sau (2):

$$x_0 = n \cdot \left(\frac{p_1}{p_1-1} \right)^{\epsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s}{p_s-1} \right)^{\epsilon_s} \in \mathbb{Z},$$

unde, pentru $1 \leq i \leq s$, avem $\epsilon_i = 0$ dacă $\alpha_i = 0$, ori $\epsilon_i = 1$ dacă $\alpha_i = 0$.

$$\text{Desigur, } n = \varphi(x_0) = x_0 \left(\frac{p_1-1}{p_1} \right)^{\epsilon_1} \cdots \left(\frac{p_s-1}{p_s} \right)^{\epsilon_s},$$

de unde rezultă a doua formă a lui x_0 .

Din (2) găsim altă limită pentru numărul de soluții: $2^s - 1$, deoarece fiecare ϵ_i are două valori numai, și cel puțin una nu este egală cu zero.

& 4.1.3. Presupunem că x_0 este o soluție unică a acestei ecuații.

Lema 4.1.3. x_0 este multiplu de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2$.

Demonstrație:

Aplicăm a doua metodă. Deoarece $\varphi(0) = \varphi(3)$ și $\varphi(1) = \varphi(2)$ luăm $x_0 \geq 4$.

Dacă $2 \nmid x_0$ atunci există $y_0 = 2x_0 = x_0$ astfel încât $\varphi(y_0) = \varphi(x_0)$, deci $2 \mid x_0$; dacă $4 \nmid x_0$ atunci putem lua $y_0 = x_0/2$.

Dacă $3 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 3x_0/2$; deci $3 \mid x_0$; dacă $9 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 2x_0/3$, deci $9 \mid x_0$; de unde $4 \cdot 9 \mid x_0$.

Dacă $7 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 7x_0/6$, deci $7 \mid x_0$; dacă $49 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 6x_0/7$, deci $49 \mid x_0$; de unde $4 \cdot 9 \cdot 49 \mid x_0$.

Dacă $43 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 43x_0/42$, deci $43 \mid x_0$; dacă $43^2 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 42x_0/43$, deci $43^2 \mid x_0$; de unde $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2 \mid x_0$.

Astfel $x_0 = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 7^{\gamma_3} \cdot 43^{\gamma_4} \cdot t$, cu toți $\gamma_i \geq 2$ și $(t, 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43) = 1$, și $x_0 > 10^{10000}$ deoarece $n_0 > 10^{10000}$.

& 4.3. Fie $\gamma_1 \geq 3$. Dacă $5 \nmid x_0$ atunci $5x_0/4 = y_0$, deci $5 \mid x_0$; dacă $25 \nmid x_0$ atunci $y_0 = 4x_0/5$, de unde $25 \mid x_0$.

Construim mulțimea recurentă M de numere prime:

(a) elementele $2, 3, 5 \in M$;

(b) dacă elementele distincte impare $e_1, \dots, e_n \in M$ și

$b_m = 1 + 2^m \cdot e_1 \dots e_n$ este prim, cu $m = 1$ sau $m = 2$, atunci $b_m \in M$;

(c) orice element aparținând lui M este obținut prin

folosirea (de un număr finit de ori) numai a regulilor (a) sau (b).

Autorul conjecturează că M este infinit, ceea ce rezolvă acest caz, deoarece rezultă că există un număr infinit de numere prime care divid pe x_0 . Care-i absurd. De exemplu: 2,

3, 5, 7, 11, 13, 23, 29, 31, 43, 47, 53, 61, ... aparțin lui M.

*

Metoda din § 4.3. poate fi continuată ca un graf arbore (pentru $\gamma_2 \geq 3$, apoi $\gamma_3 \geq 3$ etc.), dar ramificațiile sale sunt foarte multe

Referințe:

- [1] R. K. Guy, Monthly unsolved problems 1969-1983, Amer. Math. Monthly, Vol. 90, No. 10/1983, p. 684.
- [2] V. L. Klee, Amer. Math. Monthly 76/(1969), p. 288.
- [3] P. Masai & A. Valette, A lower bound for a counter-example to Carmichael's conjecture, Boll. Unione Mat. Ital. (6)A, (1982), pp. 313-316.
- [4] C. Pomerance, Math. Reviews: 49:4917.

4.2. Altă proprietate a unui contraexemplu la Conjectura lui Carmichael referitoare la funcția totient a lui Euler

Carmichael a conjecturat că:

$(\forall) n \in \mathbb{N}, (\exists) m \in \mathbb{N}, \text{ cu } m \neq n, \text{ pentru care } \varphi(n) = \varphi(m),$ unde φ este funcția totient a lui Euler.

Există multe lucrări asupra acesteia, dar autorul citează numai pe cele care l-au influențat, în special cea a lui Klee.

Fie n un număr care contrazice conjectura lui Carmichael. Grosswald a arătat că n este un multiplu de 32, Donnelly a împins rezultatul mai departe arătând că n este multiplu de 2^{14} , și Klee că este multiplu de $2^{42} \cdot 3^{42}$, Smarandache a demonstrat că este multiplu de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2$.

Masai și Valette au limitat pe $n > 10^{10000}$.

În această notă vom extinde aceste rezultate la: n este multiplu al unui produs de foarte multe numere prime.

Construim următoarea mulțime recurentă M :

- (a) elementele $2, 3 \in M$;
- (b) dacă elementele distincte $2, 3, q_1, \dots, q_r \in M$, și $p = 1 + 2^a \cdot 3^b \cdot q_1 \dots q_r$ este prim, unde $a \in \{0, 1, 2, \dots, 41\}$ și $b \in \{0, 1, 2, \dots, 46\}$, atunci $p \in M$; $r \geq 0$;
- (c) orice element aparținând lui M este obținut numai prin folosirea (de un număr finit de ori) a regulilor (a) și (b).

Desigur toate elementele din M sunt prime.

Fie n un multiplu de $2^{42} \cdot 3^{47}$;

Dacă $5 \nmid n$ atunci există $m = 5n/4 * n$ astfel încât $\varphi(n) = \varphi(m)$; deci $5 \mid n$; de unde $5 \in M$;

Dacă $5^2 \nmid n$ atunci există $m = 4n/5 * n$ cu proprietatea cerută; deci $5^2 \mid n$;

În mod analog, dacă $7 \nmid n$ putem să luăm $m = 7n/6 * n$, deci $7 \mid n$; dacă $7^2 \nmid n$ putem să luăm $m = 6n/7 * n$; hence de unde $7 \in M$ și $7^2 \mid n$; etc.

Metoda continuă până nu se mai poate adăuga nici un alt număr prim la M , prin construcția anterioară. De exemplu, din cele 168 numere prime mai mici decât 1000, numai 17 nu aparțin lui M (și anume: 101, 151, 197, 251, 401, 491, 503, 601, 607, 677, 701, 727, 751, 809, 883, 907, 983); toate celelalte 151 de numere prime aparțin lui M .

Notă: dacă $M = \{2, 3, p_1, p_2, \dots, p_s, \dots\}$, atunci n este multiplu de $2^{42} \cdot 3^{47} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2 \dots p_s^2 \dots$. Din acest exemplu, M conține cel puțin 151 de elemente, deci $s \geq 149$.

Dacă M este infinit, atunci nu există nici un contraexemplu n , deci conjectura lui Carmichael este rezolvată. (Autorul conjecturează că M este infinit.) Cu ajutorul unui computer se poate găsi un număr foarte mare de prime care divid n -- folosind metoda de construcție a lui M , și testând fiecare prim p dacă $p - 1$ este un produs de prime numai din M .

Referințe:

- [1] R. D. Carmichael, Note on Euler's ϕ function, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922) 109-110.
- [2] H. Donnelly (tbp), On a problem concerning Euler's phi-function, Amer. Math. Monthly 80 (1973) 1029-1031.
- [3] E. Grosswald, Contribution to the theory of Euler's function $\phi(x)$, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) 337-341.
- [4] R. K. Guy, Monthly research problems 1969-73, Amer. Math. Monthly 80 (1973) 1120-1128.
- [5] R. K. Guy, Monthly unsolved problems 1969-1983, Amer. Math. Monthly 90 (1983) 683-690.
- [6] R. K. Guy, Unsolved problems in number theory, Springer-Verlag, 1981, problem B39, 53.
- [7] V. L. Klee, On a conjecture of Carmichael, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 1183-1186.
- [8] V. L. Klee, Is there an n for which $\phi(x) = n$ has a unique solution?, Amer. Math. Monthly 76 (1969) 288-289.
- [9] P. Masai & A. Valette, A lower bound for a counterexample to Carmichael's conjecture, Boll. Unione Mat. Ital. (6) A1 (1982) 313-316.
- [10] F. Smarandache, On Carmichael's conjecture, Gamma, Brasov, XXIV, Anul VIII, 1986.

4.3. O generalizare a teoremei lui Euler referitoare la congruențe implicând funcția totient a lui Euler

În acest paragraf demonstrăm un rezultat care înlocuiește teorema lui Euler referitoare la congruențe:

"Dacă $(a, m) = 1$, atunci $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ ",
în cazul când a și m nu mai sunt coprime.

& 4.3.1. Noțiuni introductive.

Presupunem $m > 0$. Această supoziție nu micșorează generalitatea fiindcă funcția totient a lui Euler este pară:

$$\phi(m) = \phi(-m) \text{ (vezi [1])}$$

iar congruențele au următoarea proprietate"

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{-m} \text{ (vezi [1], pp. 12-3).}$$

De asemenea, congruențele modulo zero sunt de fapt relații de egalitate. Se notează (a, b) cel mai mare divizor comun al întregilor a și b , și se alege $(a, b) > 0$.

Lema 4.3.1. Fie a și m numere întregi, $m > 0$.

Există d_0, m_0 din $\mathbb{N}$ astfel încât $a = a_0 d_0$, $m = m_0 d_0$ și $(a_0, m_0) = 1$.

Demonstrație: este suficient să alegem $d_0 = (a, m)$. Datorită definiției cmmdc, căturile și sunt coprime (vezi [3], pp.25-6).

Lema 4.3.2. Cu notațiile din lema 4.3.1., dacă $d_0 \neq 1$

și

$$d_0 = d_0^1 d_1, m_0 = m_1 d_1, (d_0^1, m_1) = 1 \text{ și } d_1 \neq 1,$$

atunci $d_0 > d_1$ și $m_0 > m_1$, și dacă $d_0 = d_1$ atunci după un număr finit de pași i obținem $d_0 > d_{i+1} = (d_i, m_i)$.

Demonstrație.

$$(0) \begin{cases} a = a_0 d_0 & ; (a_0, m_0) = 1 \\ m = m_0 d_0 & d_0 \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_0 = d_0^1 d_1 & ; (d_0^1, m_1) = 1 \\ m_0 = m_1 d_1 & d_1 \neq 1 \end{cases}$$

Din (0) și (1) se găsește că $a = a_0 d_0 = a_0 d_0^1 d_1$ deci $d_0 = d_0^1 d_1$ deci $d_0 > d_1$ și $d_0^1 \neq 1$.

Din $m_0 = m_1 d_1$ se obține $m_0 > m_1$. Dacă $d_0 = d_1$ atunci $m_0 = m_1 d_0 = k \cdot d_0^{z-1}$ ($z \in \mathbb{N}^*$, $d_0 \nmid k$).
Deci

$$m_1 = k \cdot d_0^{z-1}; d_2 = (d_1, m_1) = (d_0, k \cdot d_0^{z-1}).$$

După $i = z$ pași se ajunge la $d_{i+1} = (d_0, k) < d_0$.

Lema 4.3.3. Pentru orice întreg a și orice număr natural $m > 0$ se poate construi următoarea secvență de relații:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & \begin{cases} a = a_0 d_0 & ; (a_0, m_0) = 1 \\ m = m_0 d_0 & ; d_0 \neq 1 \end{cases} \\
 (1) \quad & \begin{cases} d_0 = d_0^1 d_1 & ; (d_0^1, m_1) = 1 \\ m_0 = m_1 d_1 & ; d_1 \neq 1 \end{cases} \\
 & \dots\dots\dots \\
 (s-1) \quad & \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^1 d_{s-1} & ; (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1} & ; d_{s-1} \neq 1 \end{cases} \\
 (s) \quad & \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^1 d_s & ; (d_{s-1}^1, m_s) = 1 \\ m_{s-1} = m_s d_s & ; d_s = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Demonstrație: Această secvență se poate construi datorită lemei 4.3.1. Secvența este limitată conform lemei 4.3.2, deoarece după r_1 pași se obține $d_0 > d_{r_1}$ și $m_0 > m_{r_1}$, iar după r_2 pași se obține: $d_{r_1} > d_{r_1+r_2}$ și $m_{r_1} > m_{r_1+r_2}$ etc., iar numerele m_i sunt naturale. Se ajunge la $d_s = 1$ deoarece dacă $d_s \neq 1$ atunci construim din nou un număr limitat de relații $(s+1), \dots, (s+r)$, cu $d_{s+r} < d_s$.

Teorema 4.3.1. Fie $a, m \in \mathbb{Z}$ și $m \neq 0$. Atunci $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod{m}$ unde s și m_s sunt aceiași ca în lemele anterioare.

Demonstrație: Putem presupune că $m > 0$, fără a restrânge generalitatea teoremei. Din secvența de relații a lemei 4.3.3 se obține:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & a = a_0 d_0 = a_0 d_0^1 d_1 = a_0 d_0^1 d_1^1 d_2 = \dots = a_0 d_0^1 d_1^1 \dots d_{s-1}^1 d_s \\
 (1) \quad & m = m_0 d_0 = m_1 d_1 d_0 = m_2 d_2 d_1 d_0 = \dots = m_s d_s d_{s-1} \dots d_1 d_0
 \end{aligned}$$

$$\text{și } m_s d_s d_{s-1} \dots d_1 d_0 = d_0 d_1 \dots d_{s-1} d_s m_s.$$

Din (0) avem că $d_0 = (a, m)$, iar din (i) avem $d_i = (d_{i-1}, m_{i-1})$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

$$\begin{aligned}
 d_0 &= d_0^1 d_1^1 d_2^1 \dots d_{s-1}^1 d_s \\
 d_1 &= d_1^1 d_2^1 \dots d_{s-1}^1 d_s \\
 &\dots\dots\dots \\
 d_{s-1} &= d_{s-1}^1 d_s \\
 d_s &= d_s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } d_0 d_1 d_2 \dots d_{s-1} d_s &= (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s (d_s^1)^{s+1} \\ &= (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s \text{ deoarece } d_s = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Deci } m = (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s m_s ; \text{ deci } m_s \mid m ;$$

$$(d_s, m_s)^{\binom{s}{s}} (1, m_s) = 1 \quad \text{și} \quad (d_{s-1}, m_s)^{\binom{s}{s-1}}_1$$

$$1^{\binom{s-1}{s-2}} (d_{s-2}, m_{s-1}) = (d_{s-2}, m_s d_s) \quad \text{deci} \quad (d_{s-2}, m_s) = 1$$

$$1^{\binom{s-2}{s-3}} (d_{s-3}, m_{s-2}) = (d_{s-3}, m_{s-1} d_{s-1}) = (d_{s-3}, m_s d_s d_{s-1}),$$

$$\text{deci} \quad (d_{s-3}, m_s) = 1$$

.....

$$1^{\binom{i+1}{i}} (d_i, m_{i+1}) = (d_i, m_{i+2} d_{i+2}) = (d_i, m_{i+3} d_{i+3} d_{i+2}) = \dots =$$

$$= (d_i, m_s d_s d_{s-1} \dots d_{i+2}) \quad \text{deci} \quad (d_i, m_s) = 1,$$

pentru orice i din $\{0, 1, 2, \dots, s-2\}$.

.....

$$1^{\binom{0}{0}} (a_0, m_0) = (a_0, d_1 \dots d_{s-1} d_s m_s) \quad \text{deci} \quad (a_0, m_s) = 1.$$

Acum, folosind teorema lui Euler privind congruențele, obținem:

$$(d_i^1)^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s} \quad \text{pentru orice } i \text{ din } \{0, 1, \dots, s\}.$$

$$a_0^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$$

$$\text{dar } a^{\varphi(m_s)} = a_0^{\varphi(m_s)} (d_0^1)^{\varphi(m_s)} (d_1^1)^{\varphi(m_s)} \dots (d_{s-1}^1)^{\varphi(m_s)}$$

$$\text{deci } a^{\varphi(m_s)} \equiv \underbrace{1 \dots 1}_{s+1 \text{ ori}} \pmod{m_s}$$

$$a^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}.$$

$$a_0^s \cdot (d_0^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} (d_2^1)^{s-3} \dots (d_{s-2}^1)^1 \cdot a^{\varphi(m_s)} \equiv$$

$$\equiv a_0^s \cdot (d_0^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} \dots (d_{s-2}^1)^1 \cdot 1 \pmod{m_s}.$$

Înmulțim cu:

$$(d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-2}^1)^{s-1} (d_{s-1}^1)^s \quad \text{și obținem}$$

$$\begin{aligned} a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s a^{\varphi(m_s)} &\equiv a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s \\ &\pmod{(d_0^1)^1 \dots (d_{s-1}^1)^s m_s} \end{aligned}$$

dar $a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-1}^1)^s \cdot a = a^{\varphi(m_s)+s}$ și
 $a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-1}^1)^s = a^s$ deci $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod{m}$, pentru
 orice a, m din $\mathbb{Z} (m \neq 0)$.

Observații:

4.3.1. Dacă $(a, m) = 1$ atunci $d_0 = 1$. Deci $s = 0$, și conform teoremei 4.3.1 avem:

$$a^{\varphi(m_0)+0} \equiv a^0 \pmod{m} \text{ adică } a^{\varphi(m_0)+0} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Dar $m = m_0 d_0 = m_0 \cdot 1 = m_0$. Deci $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$,

și astfel obținem, ca un caz particular, teorema lui Euler.

4.3.2. Fie a și m doi întregi, $m \neq 0$ și $(a, m) = d_0 \neq 1$, și $m = m_0 d_0$. Dacă $(d_0, m_0) = 1$, atunci $a^{\varphi(m_0)+1} \equiv a \pmod{m}$.

Într-adevăr, din teorema 4.3.1 rezultă că $s = 1$ și $m_1 = m_0$. Relația aceasta arată ca teorema lui Fermat:

$$a^{\varphi(p)+1} \equiv a \pmod{p}.$$

& 4.3.2. Prezentăm mai departe un algoritm de rezolvare a congruențelor, și o schemă logică de calculare a lui s și m_s din teorema 4.3.1:

INTRARE: doi întregi a și m , $m \neq 0$.

IEȘIRE: s și m_s astfel încât

METODĂ: $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod{m}$.

(1) $A := a,$
 $M := m,$
 $i := 0.$

(2) Calculează $d = (A, M)$ și $M' = M/d$.

(3) Dacă $d = 1$, atunci $S = i$ și $m_s = M'$; stop.
 Dacă $d \neq 1$, atunci $A := d, M := M', i := i+1,$
 și mergi la pasul (2).

Corectitudinea algoritmului rezultă din lema 4.3.2 și din teorema 4.3.1.

Vezi schema logică de mai jos. În această schema logică, PROCEDURA CMMDC calculează $D = (A, M)$ și alege $D > 0$.

& 4.3.3. Aplicații la rezolvarea unor probleme cu ajutorul teoremei și algoritmului de mai înainte pentru calcularea lui s și m_s .

Exemplul 4.3.1. $6^{25604} \equiv ? \pmod{105765}$.

Nu se pot folosi nici teorema lui Fermat și nici a lui Euler deoarece $(6, 105765) = 3 \neq 1$.

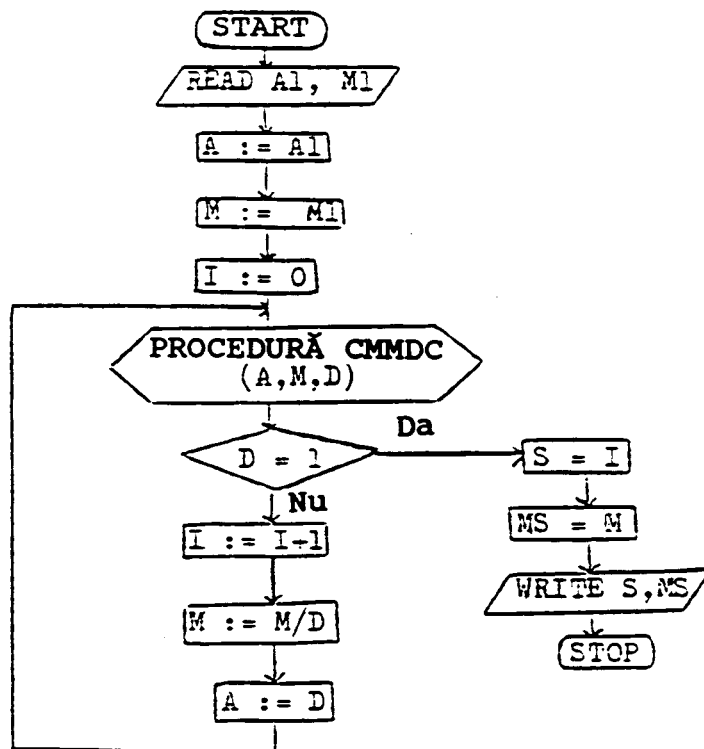
Atunci aplicăm algoritmul de mai sus pentru a afla pe s și m_s , și pe urmă teorema: $d_0 = (6, 105765) = 3$ $m_0 = 105765/3 = 35255$

$i = 0$; $3 \neq 1$ deci $i = 0 + 1 = 1$, $d_1 = (3, 35255) = 1$,
 $m_1 = 35255/1 = 35255$.

$$\begin{aligned} \text{Deci } \varphi(35255)-1 &\equiv 6 \pmod{105765} \text{ deci} \\ 25604 &\equiv 4 \pmod{105765}. \end{aligned}$$

x
x
x

Schemă Logică:



x
x
x

Referințe:

- [1] Popovici, Constantin P. - "Teoria numerelor", Curs, Bucurest, Editura didactică si pedagogică, 1973.
- [2] Popovici, Constantin P. - "Logica si teoria numerelor", Editura didactică si pedagogică, Bucurest, 1970.
- [3] Creangă I, Cazacu C, Mihut P, Opait Gh, Reischer Corina - "Introducere în teoria numerelor", Editura didactică si pedagogică, Bucurest, 1965.
- [4] Rusu E. - "Arithmetica si teoria numerelor", Editura didactică si pedagogică, Ediția a 2-a, Bucurest, 1963.

REFERINȚE GENERALE (în ordine cronologică):

- [1] Constantin Corduneanu, abstract despre această funcție în <Libertas Mathematica>, Texas State University, Arlington, Vol.9, 1989, 175;
- [2] "Smarandache Function Journal", Number Theory Publishing Co., R. Muller Editor, Phoenix, New York, Lyon, Vol.1, No.1, 1990, ISSN 1053-4792;
Prof. Dr. V. Seleacu & Lect. Dr. C. Dumitrescu, Catedra de Matematică, Universitatea din Craiova, Romania, editori ai numerelor următoare;
înregistrată de Library of Congress (Washington, D. C., USA) la cota: QA .246 .S63;
recenzat de <Ulrich's International Periodicals Directory> (R. R. Bowker, New Providence, NJ), 1993-94, p. 3437, și 1994-95, p.3787;
ași <The International Directory of Little Magazines și Small Presses> (Paradise, CA), ediția 27, 1991, 533;
menționat de Dr. Șerban Andronescu în <New York Spectator>, No. 39-40, Martie 1991, 51;
revista a fost recenzată de <Mathematical Reviews>, Ann Arbor, MI, 94c, Martie 1994, XXI;
și de <Zentralblatt fur Mathematik>, Berlin, 1995;
și <Current Mathematical Publications>, Providence, RI, USA, No. 5, Aprilie 1994;
recenzată de Constantin Corduneanu în <Libertas Mathematica>, tomus XI, 1991, 202;
menționată în lista de periodice de la <Zentralblatt fur Mathematik> (Berlin), Vol. 730, Iunie 1992, 620;
și recenzată de L. Tóth (Cluj-Napoca, Romania) în <Zentralblatt fur Mathematik>, Vol. 745 (11004-11007), 1992;
menționată în <Mathematics Magazine>, Washington, D. C., Vol. 66, No. 4, Octombrie 1993, 280;
"Smarandache function", ca o noțiune separată, este citată în "Library of Congress Subject Headings", pregătit de Cataloging Policy și Support Office, Washington, D. C., 16th Edition, Vol. IV (Q-Z), 1993, 4456;
- [3] R. Muller, "A Conjecture about the Smarandache Function", Joint Mathematics Meetings, New Mexico State University, Las Cruces, NM, Aprilie 5, 1991;
și Canadian Mathematical Society, Winter Meeting, Decembrie 9th, 1991, University of Victoria, BC;
și The SouthWest Section of the Mathematical Association of America / The Arizona Mathematics Consortium, University of Arizona, Tucson, Aprilie 3, 1992;
- [4] Sybil P. Parker, editor, <McGraw-Hill Dictionary of Scientific and Technical Terms>, New York, Scrisoare către R. Muller, Iulie 10, 1991;
- [5] William H. Buje, editor, <CRC Standard Mathematical Tables

- and Formulae>, The University of Akron, OH, Scrisoare către R. Muller, 1991;
- [6] Prof. Dr. M. Hazewinkel, Stichting Mathematisch Centrum / Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, Netherlands, Scrisoare către R. Muller, 29 Noiembrie 1991;
 - [7] Anna Hodson, Senior Editor, Cambridge University Press, England, Scrisoare către R. Muller, 28 Ianuarie 1992;
 - [8] R. Muller, "Smarandache Function journal", notă in <Small Press Review>, Paradise, CA, Februarie 1992, Vol. 24, No. 2, p. 5; și Martie 1993, Vol. 25, No. 3, p. 6;
 - [9] Pilar Caravaca, editor, <Vocabulario Científico y Técnico>, Madrid, Spain, Scrisoare către R. Muller, Martie 16, 1992;
 - [10] Mike Mudge, "The Smarandache Function" in <Personal Computer World>, London, England, No. 112, Iulie 1992, 420;
 - [11] Constantin M. Popa, Conferință la lansarea cărții "America, Paradisul Diavolului / jurnal de emigrant" (Ed. Aius, dir. prof. Nicolae Marinescu, editor Ileana Petrescu, lector Florea Miu, copertă de Traian Rădulescu, postfață de Constantin M. Popa) de Florentin Smarandache (vezi p. 162), Biblioteca Județeană <Theodor Aman>, Craiova, 3 Iulie 1992;
 - [12] Florea Miu, "Interviul nostru", in <Cuvântul Libertății>, Craiova, Romania, Anul III, Nr. 668, 14 Iulie 1992, 1 & 3;
 - [13] Mircea Moisa, "Mișcarea Literară Paradoxistă", notă editorială în <Cuvântul Libertății>, Craiova, Nr. 710, 1992;
 - [14] John McCarthy, Mansfield, Notts, U. K., "Routines for calculating S(n)" și Scrisoare către Mike Mudge, August 12, 1992;
 - [15] R. R. Bowker, Inc., Biography of <Florentin Smarandache>, in "American Men & Women of Science", New Providence, NJ, ediția 18, Vol. 6 (Q-S), 1992-3, 872;
 - [16] Jim Duncan, Liverpool, England, "PCW Numbers Count July 1992 - The Smarandache Function", manuscris trimis către Mike Mudge, August 29, 1992;
 - [17] J. Thompson, Number Theory Association, Tucson, An open problem solved (concerning the Smarandache Function) (nepublicat), Septembrie 1992;
 - [18] Thomas Martin, Proposed Problem concerning the Smarandache Function (nepublicat), Phoenix, Septembrie 1992;
 - [19] Steven Moll, editor, Grolier Inc., Danbury, CN, Scrisoare către R. Muller, 1 Octombrie 1992;
 - [20] Mike Mudge, "Review, Iulie 1992 / The Smarandache Function: a first visit?" in <Personal Computer World>, London, No. 117, Decembrie 1992, 412;
 - [21] J. Thompson, Number Theory Association, "A Property of the Smarandache Function", contributed paper, American Mathematical Society, Meeting 878, University of San Antonio, Texas, Ianuarie 15, 1993;

- și The SouthWest Section of the Mathematical Association of America, New Mexico Tech., Socorro, NM, Aprilie 16, 1993;
 vezi "Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society", Providence, RI, Issue 85, Vol. 14, No. 1, 41, Ianuarie 1993;
- [22] Mike Mudge, "Mike Mudge pays a return visit to the Florentin Smarandache Function" in <Personal Computer World>, London, No. 118, Februarie 1993, 403;
 - [23] David W. Sharpe, editor, <Mathematical Spectrum>, Sheffield, U.K., Scrisoare către Th. Martin, 12 Februarie 1993;
 - [24] Nigel Backhouse, Helsby, Cheshire, U. K., "Does Samma (= the Smarandache function used instead of Gamma function for sommation) exist?", Scrisoare către Mike Mudge, Februarie 18, 1993;
 - [25] Dr. J. R. Sutton, Mumbles, Swansea, U. K., "A BASIC PROCEDURE to calculate $S(n)$ for all powers of a prime number" și Scrisoare către Mike Mudge, Primăvara 1993;
 - [26] Pedro Melendez, Belo Horizonte, Brasil, Two proposed problems concerning the Smarandache Function (nepublicat), Mai 1993;
 - [27] Thomas Martin, Elementary Problem B-740 (folosind inversa funcției Smarandache), in <The Fibonacci Quarterly>, Editor: Dr. Stanley Rabinowitz, Westford, MA, Vol. 31, No. 2, p. 181, Mai 1993;
 - [28] Thomas Martin, Aufgabe 1075 (folosind inversa funcției Smarandache), in <Elemente der Mathematik>, Editors: Dr. Peter Gallin & Dr. Hans Walser, CH-8494 Bauma & CH-8500 Frauenfeld, Switzerland, Vol. 48, No. 3, 1993;
 - [29] I. Prodănescu, Problemă Propusă privind Funcția Smarandache (nepublicat), Lahovari College, Rm. Vâlcea, România, Mai 1993;
 - [30] Lucian Tuțescu, O generalizare a Problemei propuse de I. Prodănescu (nepublicat), Lic. No. 3, Craiova, Mai 1993;
 - [31] T. Pedreira, Bluffton College, Ohio, "Quelques Équations Diophantiennes avec la Fonction Smarandache", abstract pentru <Theorie des Nombres et Automates>, CIRM, Marseille, France, Mai 24-8, 1993;
 - [32] Prof. Dr. Bernd Wegner, editor șef, <Zentralblatt für Mathematik / Mathematics Abstracts>, Berlin, Scrisori către R. Muller, 10 Iulie 1991, 7 Iunie 1993;
 - [33] Anne Lemarchand, editoare, <Larousse>, Paris, France, Scrisoare către R. Muller, 14 Iunie 1993;
 - [34] Debra Austin, "Smarandache Function featured" in <Honeywell Pride>, Phoenix, Arizona, Iunie 22, 1993, 8;
 - [35] R. Muller, "Unsolved Problems related to the Smarandache Function", Number Theory Publishing Co., Phoenix, New York, Lyon, 1993;
 - [36] David Dillard, inginer de software, Honeywell, Inc., Phoenix, "A question about the Smarandache Function", e-mail către <SIGACT>, Iulie 14, 1993;
 - [37] Ian Parberry, Editor of <SIGACT News>, Denton, Texas, Scrisoare către R. Muller (aupra calculării funcției

- Smarandache), Iulie 19, 1993;
- [38] G. Fernandez, Paradise Valley Community College, "Smarandache Function as a Screen for the Prime Numbers", abstract pentru Conferința <Cryptography and Computational Number Theory>, North Dakota State University, Fargo, ND, Iulie 26-30, 1993;
 - [39] T. Yau, "Teaching the Smarandache Function to the American Competition Students", abstract pentru <Mathematica Seminar>, 1993; și conferința de la American Mathematical Society, Cincinnati, Ohio, Ianuarie 14, 1994;
 - [40] J. Rodriguez, Sonora, Mexico, Two open problems concerning the Smarandache Function (nepublicat), August 1993;
 - [41] J. Thompson, Number Theory Association, "Some Limits involving the Smarandache Function", abstract, 1993;
 - [42] J. T. Yau, "Is there a Good Asymptotic Expression for the Smarandache Function", abstract, 1993;
 - [43] Dan Brown, Account Executive, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, Scrisoare către T. Yau (despre implementarea funcției Smarandache pe computer folosind pachetul de programe software Mathematica®), August 17, 1993;
 - [44] Constantin Dumitrescu, "A Brief History of the Smarandache Function" (versiune preliminară), abstract pentru <Nineteenth International Congress of the History of Science>, Zaragoza, Spain, August 21-9, 1993; publicat sub titlul "The Smarandache Function" in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, UK, Vol. 26, No. 2, 39-40, 1993, Editor D. W. Sharpe; de asemenea publicat in "Octogon", Brașov, Vol. 2, No. 1, Aprilie 1994, 15-6, editor M. Bencze;
 - [45] Florin Vasiliu, "Florentin Smarandache, le poète du point sur le i", étude introductive au volume trilingue des poèmes haiku-s <Clopotul Tăcerii / La Cloche du Silence / Silence's Bell>, de Florentin Smarandache, Editura Haiku, București, translator Rodica Ștefănescu, Toamna 1993, 7-8 & 121 & 150;
 - [46] M. Marinescu, "Nume românesc în matematică", in <Universul>, Anul IX, Nr. 199, 5, Editor Aristide Buhoiu, North Hollywood, CA, August 1993; și "Literatura paradoxistă in-creată de Smarandache", in <Jurnalul de Dolj>, Director Sebastian Domoziță, Craiova, No. 38, 1-7 Noiembrie, 1993;
 - [47] G. Vasile, "Apocalipsul ca formă de guvernare", in <Baricada>, Nr.37 (192), 24, Bucharest, 14 septembrie, 1993;
 - [48] Mike Mudge, "Review of Numbers Count - 118 - Februarie 1993: a revisit to The Florentin Smarandache Function", in <Personal Computer World>, London, No. 124, August 1993, 495;
 - [49] Pål Grønås, Norway, Theoretical results on both problems (0) & (V) from [13], către Mike Mudge, Vara 1993;
 - [50] Henry Ibstedt, Broby, Sweden, Work on the problems (0) to

- (V), from [13]; câștigând premiul revistei <Personal Computer World> (concerning some open problems related to the Smarandache Function) din August 1993;
- [51] Dumitru Acu, Universitatea din Sibiu, Catedra de Matematică, România, Scrisoare din 29.08.1993;
 - [52] Francisco Bellot Rosado, Valladolid, Spain, Scrisoare din 02.09.1993;
 - [53] Dr. Petre Dini, Université de Montréal, Québec, e-mail către 23-Sep-1993;
 - [54] Ken Tauscher, Sydney, Australia, Solved problem: To find the best bond for the Smarandache Function (nepublicat), Septembrie, 1993;
 - [55] A. Stuparu, Vâlcea, Problem of Number Theory (nepublicat), Octombrie 1993;
 - [56] M. Costewitz, Bordeaux, France, Généralisation du problème 1075 de l'<Elemente der Mathematik> (nepublicat), Octombrie 1993;
 - [57] G. Dincu (Drăgășani, România), "Aritmogrif în Aritmetică" / puzzle, <Abracadabra>, Anul 2, Nr. 13, 14-5, Salinas, CA, Editor Ion Bledea, Noiembrie 1993;
 - [58] T. Yau, student, Pima Community College, "Alphanumerics and Solutions" (nepublicat), Octombrie 1993;
 - [59] Dan Fornade, "Români din Arizona", in <Luceafărul Românesc>, Anul III, Nr. 35, 14, Montréal, Canada, Noiembrie 1993;
 - [60] F. P. Micșan, "Români pe Mapamond", in <Europa>, Anul IV, Nr. 150, 15, 2-9 Noiembrie 1993;
 - [61] Valentin Verzeanu, "Florentin Smarandache", in <Clipa> Anaheim, CA, No. 117, 42, Noiembrie 12, 1993;
 - [62] I. Rotaru, "Cine este F.S. ?", prefață la jurnalul de lagăr din Turcia "Fugit ...", Ed. Tempus (director Gheorghe Stroe), București, 1993;
 - [63] T. Yau, student, Pima Community College, Two proposed problems: one solved, another unsolved (nepublicat), Noiembrie 1993;
 - [64] G. Vasile, "America, America ...", in <Acuz>, Bucharest, Anul I, No. 1, 12, 8-14 Noiembrie, 1993;
 - [65] Arizona State University, The "Florentin Smarandache Papers" Special Collection [1979 -], procesată de Carol Moore & Marilyn Wurzbarger (librarian specialists), Volume: 20 linear feet, Call #: MS SC SM-15, Locn: HAYDEN SPEC, Collections Disk 13:A:\SMARDCHE\FLRN_SMA, Tempe, AZ 85287, USA (online din Noiembrie 1993); e-mail: ICCLM@ASUACAD.BITNET, phone: (602) 965-6515;
 - [66] G. Fernandez, Paradise Valley Community College, "An Inequation concerning the Smarandache Function", abstract pentru Conferința <Mathematical Breakthroughs in the 20th Century>, State University of New York at Farmingdale, Aprilie 8-9, 1994;
 - [67] F. Vasiliu, "Paradoxism's Main Roots" (vezi "Introduction", 4), Xiquan Publ. House, Phoenix, Chicago, 1994;
 - [68] P. Melendez, Belo Horizonte, Brazil, respectiv T. Martin, Phoenix, Arizona, USA, "Problem 26.5 " [chestiunile (a),

- respectiv (b) și (c)], in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, UK, Vol. 26, No. 2, 56, 1993;
- [69] Jim Duncan, "Algorithm in Lattice C to generate $S(n)$ ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 11-2, Decembrie 1993;
 - [70] Jim Duncan, "Monotonic Increasing and Decreasing Sequences of $S(n)$ ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 13-6, Decembrie 1993;
 - [71] Jim Duncan, "On the Conjecture $D_s^{(k)}(1) = 1$ or 0 for $k \geq 2$ ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 17-8, Decembrie 1993;
 - [72] John C. McCarthy, "A Simple Algorithm to Calculate $S(n)$ ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 19-31, Decembrie 1993;
 - [73] Pål Grønås, "A Note on $S(n')$ ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, p. 33, Decembrie 1993;
 - [74] Pål Grønås, "A Proof of the Non existence of 'Samma'", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 34-5, Decembrie 1993;
 - [75] John Sutton, "A BASIC PROCedure to calculate $S(p^i)$ ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 36-7, Decembrie 1993;
 - [76] Henry Ibstedt, "The Florentin Smarandache Function $S(n)$ - programs, tables, graphs, comments", <Smarandache Function Journal>, Vol. 2-3, No. 1, pp. 38-71, Decembrie 1993;
 - [77] Veronica Balaj, Interviu la Radio Timișoara, Noiembrie 1993; published in <Abracadabra>, Salinas, CA, Anul II, Nr. 15, 6-7, Ianuarie 1994;
 - [78] Gheorghe Stroe, Postface for <Fugit ... / jurnal de lagăr> (pe coperta a IV-a), Ed. Tempus, Bucharest, 1994;
 - [79] Peter Lucaci, "Un membru de valoare în Arizona", in <America>, Cleveland, Ohio, Anul 88, Vol. 88, No. 1, p. 6, Ianuarie 20, 1994;
 - [80] Debra Austin, "New Smarandache journal issued", in <Honeywell Pride>, Phoenix, Year 7, No. 1, p. 4, Ianuarie 26, 1994;
 - [81] Ion Pachia Tatomirescu, "Jurnalul unui emigrant în <paradisul diavolului>", in <Jurnalul de Timiș>, Timișoara, Nr. 49, p.2, 31 ianuarie - 6 februarie 1994;
 - [82] Dr. Nicolae Rădescu, Department of Mathematics, University of Craiova, "Teoria Numerelor", 1994;
 - [83] Mihail I. Vlad, "Diaspora românească / Un român se afirmă ca matematician și scriitor în S.U.A.", in <Jurnalul de Târgoviște>, Nr. 68, 21-27 februarie 1994, p.7;
 - [84] Th. Marcarov, "Fugit ... / jurnal de lagăr", in <România liberă>, București, Martie 11, 1994;
 - [85] Charles Ashbacher, "Review of the Smarandache Function Journal", Cedar Rapids, IA, USA, publicat in <Journal of Recreational Mathematics>, 1994;
 - [86] J. Rodriguez & T. Yau, "The Smarandache Function" [problem I, și problem II, III ("Alphanumeric and solutions") respectiv], in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, United Kingdom, 1993/4, Vol. 26, No. 3, 84-5;

- [87] J. Rodriguez, Problem 26.8, in <Mathematical Spectrum>, Sheffield, United Kingdom, 1993/4, Vol. 26, No. 3, 91;
- [88] Ion Soare, "Valori spirituale vâlcene peste hotare", in <Riviera Vâlceană>, Rm. Vâlcea, Anul III, Nr. 2 (33), Februarie 1994;
- [89] Ștefan Smărândoiu, "Miscellanea", in <Pan Matematica>, Rm. Vâlcea, Vol. 1, Nr. 1, 31;
- [90] Thomas Martin, Problem L14, in <Pan Matematica>, Rm. Vâlcea, Vol. 1, Nr. 1, 22;
- [91] Thomas Martin, Problems PP 20 & 21, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
- [92] Ion Prodanescu, Problem PP 22, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
- [93] J. Thompson, Problems PP 23, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
- [94] Pedro Melendez, Problems PP 24 & 25, in <Octogon>, Vol. 2, No. 1, 31;
- [95] Dr. C. Dumitrescu, "La Fonction de Smarandache - une nouvelle dans la théorie des nombres", Congrès International <Henry-Poincaré>, Université de Nancy 2, France, 14 - 18 Mai, 1994;
- [96] C. Dumitrescu, "La Fonction de Smarandache - une nouvelle fonction dans la théorie des nombres", Congrès International <Henry-Poincaré>, Université de Nancy 2, France, 14 - 18 Mai, 1994;
- [97] C. Dumitrescu, "A brief history of the <Smarandache Function>", republicat in <New Wave>, 34, 7-8, Vara 1994, Bluffton College, Ohio; Editor Teresinka Pereira;
- [98] C. Dumitrescu, "A brief history of the <Smarandache Function>", republicat in <Octogon>, Brașov, Vol. 2, No. 1, 15-6, Aprilie 1994; Editor Mihaly Bencze;
- [99] Magda Iancu, "Se întoarce acasă americanul / Florentin Smarandache", in <Curierul de Vâlcea>, Rm. Vâlcea, Iunie 4, 1994;
- [100] I. M. Radu, Bucharest, Unsolved Problem (nepublicat);
- [101] W. A. Rose, University of Cambridge, (și Gregory Economides, University of Newcastle upon Tyne Medical School, England), Solutions to Problem 26.5 [(a), (b), (c)], in <Mathematical Spectrum>, U. K., Vol. 26, No. 4, 124-5;
- [102] David E. Zitarelli, recenzie la "A brief history of the <Smarandache Function>", in <HISTORIA MATHEMATICA>, Academic Press, Inc., Harcourt Brace & Co., San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo; Vol. 21, No. 1, Februarie 1994, 102; #21.1.42; și in <HISTORIA MATHEMATICA>, Vol. 21, No. 2, Mai 1994, 229; #21.2.28, #21.2.29;
- [103] Carol Moore, Arizona State University Library, Scrisoare către C. Dumitrescu și V. Seleacu asupra Arhivelor Noțiunilor Smarandache, Aprilie 20, 1994;
- [104] T. Yau, "Teaching the Smarandache Function to the American Competition Students", abstract, Department of Mathematics, University of Oregon, 1994; Scrisoare de la Richard M. Koch, 6/14/94;

- [105] George Fernandez, Paradise Valley Community College, "An inequation concerning the Smarandache Function", abstract, International Congress of Mathematicians (ICM 94), Zürich, 3-11 August 1994;
- [106] George Mișin Vărieșescu, Sydney, Australia, abstract in "Orizonturi Albastre / Poeți Români în Exil", Cogito Publishing House, Oradea, 1993, 89-90;
- [107] Paula Shanks, <Mathematical Reviews>, Scrisoare către R. Muller, Decembrie 6, 1993;
- [108] Harold W. Billings, Director of General Libraries, The University of Texas at Austin, "The Florentin Smarandache Papers (1978-1994)" Special Collection, Archives of American Mathematics, Center for American History, SRH 2.109, TX 78713, tel. (512) 495-4129, 10 linear feet;
- [109] M. Andrei, I. Bălăcenoiu, C. Dumitrescu, E. Rădescu, N. Rădescu, și V. Seleacu, "A linear combination with the Smarandache Function to obtain the identity", <Proceedings of the 26th Annual Iranian Mathematics Conference>, pp. 437-9, Kerman, Iran, Martie 28-31, 1995;
- [110] I. Rotaru, "Cine este Florentin Smarandache ?", preface for "Fugit... jurnal de lagăr", p. 5, Ed. Tempus, Bucharest, 1994;
- [111] Geo Stroe, postfață la "Fugit... jurnal de lagăr", coperta IV, Ed. Tempus, Bucharest, 1994;
- [112] Henry Ibstedt, "Smarandache Function Graph / The prominence of Prime Numbers", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, coperta I, Septembrie 1994;
- [113] Ion Bălăcenoiu, "Smarandache Numerical Functions", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 6-13, Septembrie 1994;
- [114] Pål Grønås, "The Solution of the diophantine equation $\sigma_n(n) = n(\Omega)$ ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 14-6, Septembrie 1994;
- [115] J. R. Sutton, "Calculating the Smarandache Function for powers of a prime (Pascal program)", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 24-26, Septembrie 1994;
- [116] J. R. Sutton, "Calculating the Smarandache Function without factorising", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, pp. 27-31, Septembrie 1994;
- [117] Henry Ibstedt, "An Illustration of the Distribution of the Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 4-5, No. 1, 34-5, Septembrie 1994;
- [118] Peter Bundschuh, Köln, "Auswertung der eingesandten Lösungen", in <Elemente der Mathematik>, Switzerland, Vol. 49, No. 3, 1994, 127-8;
și Harald Friepertinger (Graz, Austria), Walther Janous (Innsbruck, Austria), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Joachim Klose (Bonn), Hansjurg Ladrach (Aarwangen, CH), Pieter Moree (Princeton, USA), Andreas Muller (Altendorf, CH), Werner Raffke (Vechta, Germany), Hans Schneider (Freiburg i. Br.), H.-J. Seiffert (Berlin), Michael Vowe (Therwill, CH) au rezolvat de asemenea această problemă;
- [119] Gh. Tomozei, "Funcția Smarandache", prefață la <Exist

- împotriva mea>, poeme pre-paradoxiste de F. Smarandache, Ed. Macarie, Târgoviște, 1994, pp. 5-9;
și in <Literatorul>, București, Nr. 42 (159), 14-21 Octombrie 1994, p.6;
- [120] Khalid Khan, London School of Economics, "Scrisoare către the Editor / The Smarandache function", in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 1, 1994/5, 20-1;
 - [121] Pål Grønås, Stjordal, Norway, "Scrisoare către the Editor / The Smarandache function", in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 1, 1994/5, 21;
 - [122] Khalid Khan, London School of Economics, Solution to Problem 26.8, in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 1, 1994/5, 22;
rezolvată și de David Johansen și Polly Show, Dame Allan's Girls' School, Newcastle upon Tyne, U. K.;
 - [123] Jane Friedman, "Smarandache in Reverse" / solution to problem B-740, in <The Fibonacci Quarterly>, USA, Noiembrie 1994, pp. 468-9;
 - [124] A. Stuparu, Problem H-490, in <The Fibonacci Quarterly>, Vol. 32, No. 5, Noiembrie 1994, p.473;
 - [125] Dumitru Ichim, Cronică in <Cuvântul Românesc>, Hamilton, Ontario, Canada, Anul 20, Nr. 221, Noiembrie 1994, p.12;
 - [126] Mihaly Bencze, Open Question: QQ 6, in <Octogon>, Brașov, Vol. 2, No. 1, Aprilie 1994, p.34;
 - [127] Pr. R. Halleux, redactor șef, <Archives Internationales d'Histoire des Sciences>, Université de Liège, Belgique, Scrisoare către R. Muller, 14 Noiembrie 1994;
 - [128] Marian Mirescu, "Catedrala Funcției Smarandache" (desen), in <Abracadabra>, Salinas, CA, Decembrie 1994, p. 20;
 - [129] A. D. Rachieru, " 'Avalanșa' Smarandache", in <Banatul>, Timișoara, Nr. 4, 1994;
 - [130] Gh. Suci, "Spre America - Via Istambul", in <Minerva>, Bistrița-Năsăud, Anul V, No. 39-40, p.10, Octombrie - Noiembrie 1994;
 - [131] Ion Radu Zăgreanu, " 'Exist împotriva mea' ", in <Minerva>, Bistrița-Năsăud, Anul V, No. 39-40, p.10, Octombrie - Noiembrie 1994;
 - [132] R. Muller, editor of "Unsolved Problems related to Smarandache Function", Number Theory Publ. Co., Phoenix, 1993;
recenzat in <Mathematical Reviews>, Ann Arbor, 94m:11005, 11-06;
 - [133] Gh. Stroe, "Smarandache Function", in <Tempus>, Bucharest, Anul III. Nr. 2(5), Noiembrie 1994, p.4;
 - [134] Dr. Dumitru Acu, University of Sibiu, "Funcția Smarandache...", in <Abracadabra>, Salinas, CA, Ianuarie 1995, No. 27, Anul III, p.20;
 - [135] Lucian Tuțescu, "...funcția Smarandache...", in <Abracadabra>, Salinas, CA, Ianuarie 1995, No. 27, Anul III, p.20;
 - [136] Constantin M. Popa, "Funcția...", in <Abracadabra>, Salinas, CA, Ianuarie 1995, No. 27, Anul III, p.20;
 - [137] Prof. M. N. Gopalan, Editor, <Bulletin of Pure & Applied

- Sciences>, Bombay, India, Scrisoare către M. Andrei, Decembrie 26, 1994;
- [138] Dr. Peter L. Renz, Academic Press, Cambridge, Massachusetts, Scrisoare către R. Muller, Ianuarie 11, 1995;
- [139] Charles Ashbacher, recenzie la "Smarandache function Journal", in <Journal of Recreational Mathematics>, USA, Vol. 26(2), pp. 138-9, 1994;
- [140] N. J. A. Sloane, S. Plouffe, B. Salvy, "The Encyclopaedia of Integer Sequences", Academic Press, San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1995, M0453 NO167;
 și online: SUPERSEEKER@RESEARCH.ATT.COM (de N. J. A. Sloane, S. Plouffe, B. Salvy, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974, USA)
 prezentate ca:
 "NUMERELE SMARANDACHE": $S(n)$, pentru $n = 1, 2, 3, \dots$, [M0453], (valorile Funcției Smarandache),
 și
 "CĂTURILE SMARANDACHE": pentru $n > 0$, să se găsească cel mai mic k astfel încât nk să fie un factorial, adică $S(n)/n$, pentru $n = 1, 2, 3, \dots$;
 și in ultima versiune electronică a enciclopediei mai există alte 12 noțiuni:
 "DUBLII FACTORIALI SMARANDACHE", "BAZA PĂTRATĂ SMARANDACHE", "BAZA CUBICĂ SMARANDACHE", "BAZA PRIMĂ SMARANDACHE", "SECVENȚA SIMETRICĂ SMARANDACHE", "SECVENȚA CONSECUTIVĂ SMARANDACHE", "SECVENȚA DECONSTRUCTIVĂ SMARANDACHE", "SECVENȚA OGLINDĂ SMARANDACHE", "SECVENȚA PERMUTAȚIONALĂ SMARANDACHE", "SECVENȚA INVERSĂ SMARANDACHE", "CIURUL CONSECUTIV SMARANDACHE", "FUNCȚIA PSEUDO-SMARANDACHE";
- [141] Editorii de la <Mathematical Reviews>, recenzia cărții "Unsolved Problems related to Smarandache Function" de F. Smarandache, editată de R. Muller, 94m:11005;
- [142] Jean-Marie De Koninck, Quebec, recenzia articolului "A function in the number theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11007, p.6940;
- [143] Jean-Marie De Koninck, Quebec, recenzia articolului "Some linear equations involving a function in the number theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11008, p.6940;
- [144] Armel Mercier, recenzia articolului "An infinity of unsolved problems concerning a function in the number theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11010, p.6940;
- [145] Armel Mercier, recenzia articolului "Solving problems by using a function in the number theory" de F. Smarandache, in <Mathematical Reviews>, 94m:11011, p.6941;
- [146] I. M. Radu, Bucharest, Scrisoare către the Editor ("The Smarandache function"), in <Mathematical Spectrum>, Sheffield University, UK, Vol. 27, No. 2, p. 43, 1994/5;

- [147] Paul Erdos, Hungarian Academy of Sciences, Scrisoare către Editor ("The Smarandache function inter alia"), in <Mathematical Spectrum>, Vol. 27, No. 2, pp. 43-4, 1994/5;
- [148] Ion Soare, "Un scriitor al paradoxurilor: Florentin Smarandache", 114 pages, Ed. Almarom, Rm. Vâlcea, Romania, p.67, 1994;
- [149] Dr. C. Dumitrescu, "Funcția Smarandache", in <Foaie Matematică>, Chișinău, Moldova, No. 3, p. 43, 1995;
- [150] D. W. Sharpe, A. Stuparu, Problem 1, in <Foaie Matematică>, Chișinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
- [151] Pedro Melendez, Problem 2, in <Foaie Matematică>, Chișinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
- [152] Ken Tauscher, Problem 3, in <Foaie Matematică>, Chișinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
- [153] Thomas Yau, Problem 4, in <Foaie Matematică>, Chișinău, Moldova, No. 3, p.43, 1995;
- [154] Lohon, O., Buz, Maria, Biblioteca Universității din Craiova, Scrisoarea Nr. 499, Iulie 07, 1995.
- [155] Growney, JoAnne, Bloomsburg University, PA, "The most Humanistic Mathematician: Florentin Smarandache" și Larry Seagull, "Poem in Arithmetic Space", in <Humanistic Mathematics Network>, Harvey Mudd College, Claremont, CA, Octombrie 1995, # 12, p. 38 și respectiv pp. 38-40;
- [156] Le, Charles T., "The most paradoxist mathematician of the world", in <Bulletin of Number Theory>, Martie 1995, Vol. 3, No. 1;
- [157] Seagull, Larry, Glendale Community College, "Poem in Arithmetic Space", in <Abracadabra>, Salinas, CA, August 1995, Anul III, No. 34, pp.20-1;
- [158] Moore, Carol (Library Specialist), Wurzbarger, Marilyn (Head of Specila Collections), Abstract, "The Florentin Smarandache papers" special collection, Call # SM SC SM-15, at Arizona State University, Tempe, AZ 85287-1006, Box 871006, Tel. (602) 965-6515, E-mail: icclmc@asuvm.inre.asu.edu , USA;
- [159] Zitarelli, David, recenzie asupra articolului "A brief history of the 'Smarandache Function'", de C. Dumitrescu, in <Historia Mathematica>, Academic Press, USA, Mai 1995, Vol. 22, No. 2, p. 213, #22.2.22;
- [160] Alkire, Leland G., Jr., Editor, <Periodical Title Abbreviations>, Kennedy Library, Eastern Washington University, Cheney, Washington, Scrisoare către R. Muller, Aprilie 1995;
- [161] Summary of R. Muller.s "Unsolved problems related to Smarandache Function" book, in <Zentralblatt fur Mathematik>, Berlin, 1995, 804-43, 11006;
- [162] Dumitrescu, C., "Funcția Smarandache", in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, p. 976;
- [163] Melendez, Pedro, Bello Horizonte, Brazil, Problemă Propusă 1, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No.

- 33, p. 976;
- [164] Sharpe, D. W., Stuparu, A., Problemă Propusă 2, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, pp. 976-7;
 - [165] Rodriguez, J., Sonora, Mexico, Problemă Propusă 3, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, p. 977;
 - [166] Tauscher, Ken, Sydney, Australia, Problemă Propusă 4, in <Caiet de informare matematică>, 'Nicolae Grigorescu' College, Câmpina, Mai 1995, Anul XVII, No. 33, p. 977;
 - [167] Index of <Mathematical Spectrum>, University of Sheffield, England, Vara 1995, Vol. 25-7, p. 71;
 - [168] Abstract privind <Smarandache Function Journal>, in <Ulrich's International Periodicals Directory>, USA, 1994-5, Mathematics 3783;
 - [169] Burton, Emil, <Tudor Arghezi> College, Craiova, Scrisoare din Mai 18, 1995;
 - [170] Fons Libris, Pretoria, South Africa, Scrisoare către Editor, Mai 1995;
 - [171] Sakharova, V., <Referativnyi Zhurnal>, Moscow, Russia, Scrisoare către R. Muller, Iulie 20, 1995, No. 64-645/11;
 - [172] Dumitrescu, C., Seleacu, V., editori, "Some notions și questions in the number theory", Erhus Univ. Press, Glendale, Arizona, 1994;
 - [173] Erdos, Paul, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Scrisoare către T. Yau, Iunie 18, 1995;
 - [174] Lungu, Al., Bonn, Germany, Scrisoare din Aprilie 04, 1995;
 - [175] Vlad, Mihail I., "Nota Editorului", in <Emigrant la Infinit>, Ed. Macarie, Târgoviște, Romania, 1995;
 - [176] Henry Ibstedt, "Smarandache's Function $S(n)$ Distribution for n up to 100", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, coperta I, Iunie 1995;
 - [177] Marcela Popescu, Paul Popescu, Vasile Seleacu, "On some numerical functions", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 3-5, Iunie 1995;
 - [178] I. Bălăcenoiu, V. Seleacu, "Properties of the numerical functions F_s ", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 6-10, Iunie 1995;
 - [179] V. Seleacu, Narcisa Vîrlan, "On a limit of a sequence of a numerical function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 11-2, Iunie 1995;
 - [180] Emil Burton, "On some series involving the Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 13-5, Iunie 1995;
 - [181] I. Bălăcenoiu, V. Seleacu, "Some properties of the Smarandache Function of the type I", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 16-20, Iunie 1995;
 - [182] Charles Ashbacher, "Some problems on Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 21-36, Iunie 1995;
 - [183] I. Bălăcenoiu, M. Popescu, V. Seleacu, "About the

- Smarandache Square's Complementary Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 37-43, Iunie 1995;
- [184] Tomiță Tiberiu Florin, "Some remarks concerning the distribution of the Smarandache function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 44-9, Iunie 1995;
 - [185] E. Rădescu, N. Rădescu, C. Dumitrescu, "Some elementary algebraic considerations inspired by the Smarandache Function", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 50-4, Iunie 1995;
 - [186] I. Bălăcenoiu, C. Dumitrescu, "Smarandache Functions of the Second Kind", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 55-8, Iunie 1995;
 - [187] M. Popescu, P. Popescu, "The problem of Lipschitz Condition", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, pp. 59-63, Iunie 1995;
 - [188] L. Seagull, "A generalization of a problem of Stuparu", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, p. 71, Iunie 1995;
 - [189] L. Seagull, "An important formula to calculate the number of primes less than x", <Smarandache Function Journal>, Vol. 5-6, No. 1, p. 72, Iunie 1995;
 - [190] Tomikawa, Hisaya, Magalog Project Group, Tokyo, Japan, abstract despre <Smarandache Notions> journal, August 1995;
 - [191] Erdos, Paul, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Scrisoare către T. Yau, August 7, 1995;
 - [192] Hazewinkel, M., Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, Scrisoare către I. Bălăcenoiu, Iulie 4, 1995;
 - [193] Sloane, N. J. A., AT&T Bell Labs, Murray Hill, New Jersey, USA, njas@research.att.com, E-mails to R. Muller, Februarie - August 1995;
 - [194] Ashbacher, Charles, Decisionmark, Cedar Rapids, Iowa, "An Introduction to the Smarandache Function", 60 pp., Erhus University Press, Vail, Az, USA, 1995;
 - [195] Ecker, Michael W., Editor of <Recreational & Educational Computing>, Clarks Summit, PA, E-mail of 22-SEP-1995;
 - [196] Ecker, Michael W., Editor of <Recreational & Educational Computing>, Clarks Summit, PA, Două E-mail-uri din 26-SEP-1995;
 - [197] Andrei, M., Dumitrescu, C., Seleacu, V., Tutescu, L., Zafir, St., "Some remarks on the Smarandache function", in <Bulletin of Pure and Applied Sciences>, Editor Prof. M. N. Gopalan, Bombay, India, Vol. 14E, No. 1, 35-40, 1995;
 - [198] Mudge, Michael Richard, Scrisoare către S. Abbott, The Editor of <The Mathematical Gazette>, U. K., Octombrie 7, 1995;
 - [199] Mudge, Michael Richard, Scrisoare către David Wells, The Author of the <Penguin Dictionary of Interesting and Curious Numbers>, U. K., Octombrie 8, 1995;
 - [200] Mudge, Michael Richard, "A paradoxal mathematician, his function, paradoxist geometry, and class of paradoxes",

- manuscris, Octombrie 7, 1995;
- [201] Mudge, Michael Richard, "A paradoxal mathematician, his function, paradoxist geometry, and class of paradoxes", manuscris, Octombrie 7, 1995;
 - [202] Ashbacher, Charles, Problem A, in <Personal Computer World>, London, Octombrie 1995;
 - [203] Radu, I. M., Problem B, in <Personal Computer World>, London, Octombrie 1995;
 - [204] Mudge, Mike, "The Smarandache Function revisited, plus a reader's miscellany", in <Personal Computer World>, London, Octombrie 1995;
 - [205] Ashbacher, Charles, "The Smarandache function-1", Scrisoare către the Editor, in <The Mathematical Spectrum>, editor D. W. Sharpe, University of Sheffield, Vol. 28, No. 1, 20, 1995/6;
 - [206] Seagull, L., "The Smarandache function-2", Scrisoare către Editor, in <The Mathematical Spectrum>, editor D. W. Sharpe, University of Sheffield, Vol. 28, No. 1, 20, 1995/6;
 - [207] Ashbacher, Charles, "The Smarandache function and the Fibonacci relationship", Scrisoare către the Editor, in <The Mathematical Spectrum>, editor D. W. Sharpe, University of Sheffield, Vol. 28, No. 1, 20, 1995/6;
 - [208] Ashbacher, Charles, Scrisoare către R. Muller, Octombrie 26, 1995;
 - [209] Muller, R., Scrisoare către Elias Toubassi, University of Arizona, Tucson, Octombrie 30, 1995;
 - [210] Dumitrescu, Constantin, "Solved and Unsolved Problems related to the Smarandache Function", The Second Asian Mathematics Conference (AMC '95), Nakhon Ratchasima, Thailand, Octombrie 17-20, 1995;
 - [211] Sandor, Jozsef, Forteni, Harghita, "On certain inequalities involving the Smarandache function", articol nepublicat;
 - [212] Zitarelli, David E., Scrisoare către Mario Hernandez, Noiembrie 1995;
 - [213] Bruckman, Paul S., Solution to problem H-490, in <The Fibonacci Quarterly>, Vol. 33, No. 5, Noiembrie 1995, pp. 476-7;
și de asemenea M. Ballieu, A. Dujella, N. Jensen, H.-J. Seiffert, A. Stuparu;
 - [214] 'First International Conference on Smarandache Type Notions in Number Theory', August 21-24, 1997, organizatori: C. Dumitrescu & V. Seleacu, Dept. of Math., Univ. of Craiova, Romania
[vezi <Notices of the American Mathematical Society>, Vol. 42, No. 11, Noiembrie 1995, p. 1366];
conferința se desfășoară sub auspiciile UNESCO;
 - [215] Radu, I.M., Problem PP60, in <Octogon>, Brașov, Vol. 3, No. 1, Aprilie 1995, p. 50;
 - [216] Yau, T., Problems PP66 & PP67, in <Octogon>, Brașov, Vol. 3, No. 1, Aprilie 1995, p. 51;
 - [217] Andrei, M., Dumitrescu, C., Seleacu, V., Tuțescu, L., Zanfir, Șt., "Some Remarks on the Smarandache Function",

- in <Octogon>, Braşov, Vol. 3, No. 1, Aprilie 1995, pp. 23-7;
- [218] Abbott, Steve, Farlingaye High School, England, Review of "The Smarandache Function Journal 4-5 (1)", in <The Mathematical Gazette>, London, Vol. 79, No. 4-86, Noiembrie 1995, p. 608;
 - [219] Mudge, Michael R., Dyfed, U.K., "Introducing the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions", manuscript, 11-19-1995;
 - [220] Mudge, Michael R., Dyfed, U.K., "The Smarandache Near-To-Primorial Function", manuscris, 11-19-1995;
 - [221] Mudge, Michael R., Dyfed, U.K., Scrisoare către R. Muller, 11-19-1995;
 - [222] Suggett, Gareth, U.K., "Primes between consecutive Smarandache numbers", lucrare nepublicată, Noiembrie 1995;
 - [223] Bălăcenoiu, Ion & Seleacu, Vasile, "Some properties of the Smarandache Functions of the Type I", in <Octogon>, Braşov, Vol. 3, No. 2, Octombrie 1995, pp. 27-30;
 - [224] Ibstedt, Henry, "Base Solution (The Smarandache Function)", Broby, Sweden, Noiembrie 30, 1995, manuscris;
 - [225] Faure, H., Centre de Mathematique et d'Informatique, Universite de Provence, Marseille, France, Scrisoare către C. Dumitrescu, Septembrie 19, 1995.
 - [226] Policarp, Gane & Stadler, Mihail, "Istoria Matematicii / Aniversările din anul 1995", in <Caiet de Informare Matematică>, Câmpina, Anul XVII, No. 34, Decembrie 1995, p. 1013;
 - [227] Popescu, Titu, Karlsfeld, Germany, şi Larry Seagull, "Poem in Arithmetic Space", pp. 134-7 in cartea <Estetica Paradoxismului> (143 pages), Editura Societăţii Tempus, Bucharest, 1995;
 - [228] Rodriguez, J., Sonora, Mexico, Problema 5, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 4, p. 37, 1995;
 - [229] Melendez, P., Belo Horizonte, Brazil, Problema 6, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 4, p. 37, 1995;
 - [230] Yau, T., Pima Community College, Tucson, Az, Problema 7, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 4, p. 37, 1995;
 - [231] Seagull, L., Glendale Community College, USA, Problema 9, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 6, p. 40, 1995;
 - [232] Stuparu, A., Vâlcea, Romania, Problema 10, <Foaie Matematică>, Chişinău, Rubrica de <Probleme cu Funcţia Smarandache> editată de V. Suceveanu, No. 6, p. 40, 1995;
 - [233] Crudu, Dumitru, "Florentin Smarandache sau încăpăţânarea unui exilat", in <Vatra>, Tg. Mureş, Anul XXV, Nr. 295, p.92, Octombrie 1995;
 - [234] Bărbulescu, Radu, "Florentin Smarandache: 'Exist împotriva mea'", <Observator>, Munchen, Germania, Anul

- VIII, No. 2-4 (27-9), p. 72, Martie-Decembrie 1995;
- [235] Kashiara, Kenichiro, Tokyo, Japonia, E-mail_uri către R. Muller, Decembrie 1995 - Ianuarie 1996;
 - [236] Strazzabosco, Barbara, secretară Prof. B. Wegner, editor, <Zentralblatt fur Mathematik>, Berlin, Scrisoare către R. Muller, Octombrie 13, 1995;
 - [237] Kiser, Lisa A., Lock Haven University, PA, Scrisoare către Ch. Ashbacher, Cedar Rapids, IA, Decembrie 4, 1995;
 - [238] Tuțescu, Lucian, "Funcția lui Smarandache -- o nouă funcție în teoria funcțiilor", Societatea de Științe Matematice din România, <Programul manifestărilor organizate cu prilejul împlinirii a 100 ani de la apariția primului număr al revistei 'Gazeta Matematică', 1895-1995>, Inspectoratul Școlar al Județului Alba, Sala de Ședințe a Liceului Militar 'Mihai Viteazul', Alba Iulia, Simposion, 18-20 Februarie 1995;
 - [239] A. Mullin, Huntsville, AL, USA, "On the Smarandache Function and the Fixed-Point Theory of Numbers", manuscris nepublicat, 1995;
 - [240] Corduneanu, Constantin, "Personalalia", in <Libertas Mathematica>, Texas State University, Arlington, USA, Vol. XV, p. 241, 1995.

FUNȚII PRIME ÎN TEORIA NUMERELOR

Vom construi o clasă de funcții, definite astfel:

$$P_1 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, \quad P_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ este prim;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

De exemplu $P_1(2) = P_1(3) = P_1(5) = \dots = 0$,

pe când $P_1(0) = P_1(1) = P_1(4) = \dots = 1$.

În general, pentru un întreg dat $k \geq 1$, se poate defini:

$$P_k : \mathbb{N}^* \rightarrow \{0, 1\},$$

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ sunt toate prime;} \\ 1, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Mai departe, să studiem în ce condiții $P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = 0$, sau să determinăm condiții necesare și suficiente astfel încât n întregi, primi între ei doi câte doi, să fie simultan primi.