

1

Ion GOIAN Raisa GRIGOR Vasile MARIN Florentin SMARANDACHE

Algebra

***în exerciții și probleme
pentru liceu***

Mulțimi, operații cu mulțimi

Relații, funcții

Elemente de combinatorică

CARTIER

Editura Cartier SRL, str. București, nr. 68, Chișinău, MD2012.

Tel./fax: 24 83 68. E-mail: cartier@mdl.net

Editura Codex 2000 SRL, str. Paul Ionescu, nr. 6, sectorul 1, București.

Tel./fax: 01/223 44 88. GSM: 094 30 49 15.

Difuzare:

București: str. Paul Ionescu, nr. 6, sectorul 1.

Tel./fax: 01/223 44 88. GSM: 094 30 49 15.

Chișinău: bd. Mircea cel Bătrîn, nr. 9, sectorul Ciocana. Tel.: 34 64 61.

ALGEBRA ÎN EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU LICEU

(Mulțimi, operații cu mulțimi. Relații, funcții. Elemente de combinatorică.)

Autori: Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache.

Coperta: Vitalie Coroban

Prepress: Centrul de Matematică Aplicată și Informatică

© Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache, 2000,
pentru prezenta ediție.

Această ediție a apărut în 2000 la Editura Cartier.

Toate drepturile rezervate.

Cărțile CARTIER pot fi procurate în toate librăriile bune
din România și Republica Moldova.

LIBRĂRIILE CARTIER

Casa Cărții, bd. Mircea cel Bătrîn, nr. 9, sectorul Ciocana, Chișinău. Tel.: 34 64 61.

Librăria din Hol, str. București, nr. 68, Chișinău, MD2012.

Tipărit în Republica Moldova de Concernul Presa. Comanda 1147

ISBN 9975-79-040-2

Cuvânt înainte

Prezenta lucrare conține exerciții și probleme de algebră, grupate pe capitole, pentru clasele superioare de licee și școli medii de cultură generală. Scopul ei este pregătirea matematică a elevilor din liceele de toate categoriile și va fi utilă în lucrul de sine stătător. De asemenea, lucrarea poate fi folosită pentru lucrul extrașcolar, deoarece cititorul va găsi în ea teoreme și formule importante, noțiuni și definiții de bază care nu întotdeauna sunt incluse în manualele școlare.

Autorii

Notatii

$=$	egal;
$\neq$	diferit;
$\in$	aparține;
$\notin$	nu aparține;
$\subseteq$	inclus în;
$\supseteq$	include pe;
$\cup$	reuniune;
$\cap$	intersecție;
$\emptyset$	mulțimea vidă;
$\vee$	(sau) disjuncție;
$\wedge$	(și) conjuncție;
$p \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} q$	prin definiție p este q ;
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	mulțimea numerelor naturale;
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	mulțimea numerelor întregi;
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$	mulțimea numerelor raționale;
$\mathbb{R}$	mulțimea numerelor reale;
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$	mulțimea numerelor complexe;
$A_+ = \{x \in A \mid x > 0\}, A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\};$	
$A_- = \{y \in A \mid y < 0\}, A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\};$	
$A^* = \{z \in A \mid z \neq 0\} = A \setminus \{0\},$ $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\};$	
$ x $	modulul (valoarea absolută) lui $x \in \mathbb{R}$;
$[x]$	partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$;

$\{x\}$	partea fracționară a lui $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \{x\} < 1$;
(a, b)	cuplul având ca prim element pe a și ca al doilea element pe b (se mai zice “pereche ordona- tă”);
(a, b, c)	triplet cu elementele respective a, b, c ;
$A \times B = \{(a, b) a \in A, b \in B\}$	produsul cartezian dintre mulți- mea A și mulțimea B ;
$A \times B \times C = \{(a, b, c) a \in A, b \in B, c \in C\}$	produsul cartezian dintre mulți- mile A, B, C ;
E	mulțimea universală;
$P(E) = \{X X \subseteq E\}$	mulțimea părților (submulțimi- lor) mulțimii E ;
$A = B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall)x \in E(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$	egalitatea mulțimilor A și B ;
$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall)x \in E(x \in A \Rightarrow x \in B)$	A se include în B ;
$A \cup B = \{x \in E x \in A \vee x \in B\}$	reuniunea mulțimilor A și B ;
$A \cap B = \{x \in E x \in A \wedge x \in B\}$	intersecția mulțimilor A și B ;
$A \setminus B = \{x \in E x \in A \wedge x \notin B\}$	diferența dintre mulțimile A și B ;
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	diferența simetrică;
$C_E(A) = \overline{A} = E \setminus A$	complimentara mulțimii A în raport cu mulțimea E ;
$\alpha \subseteq A \times B$	relația α definită pe mulțimile A și B ;
$f: A \longrightarrow B$	funcție (aplicație) definită pe A cu valori în B ;
$D(f)$	domeniul de definiție al funcției f ;
$E(f)$	domeniul de valori ale funcției f .

CAPITOLUL I

Mulțimi. Operații cu mulțimi

1.1. Definiții și notații

Teoria axiomatică a mulțimilor este foarte dificilă pentru a fi expusă la un nivel elementar, de aceea, intuitiv, prin **mulțime** vom înțelege o colecție de obiecte pe care le vom numi **elemente** sau **puncte** ale acestei mulțimi. O mulțime este definită dacă sunt date elementele sale sau dacă se dă o proprietate pe care o au toate elementele sale, proprietate care le deosebește de elementele altei mulțimi. Ulterior mulțimile le vom nota cu majuscule: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$, iar elementele lor cu minuscule: $a, b, c, \dots, x, y, z$ etc.

Dacă a este un element al mulțimii A , vom scrie $a \in A$ și vom citi " a aparține lui A " sau " a este element din A ". Pentru a exprima că a nu este un element al mulțimii A , vom scrie $a \notin A$ și vom citi " a nu aparține lui A ".

Printre mulțimi admitem existența unei mulțimi notate $\emptyset$, numită **mulțime vidă**, care nu conține nici un element.

Mulțimea ce conține un singur element a o notăm cu $\{a\}$. Mai general, mulțimea ce nu conține alte elemente decât elementele $a_1, a_2, \dots, a_n$ o notăm prin $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Dacă A este o mulțime toate elementele căreia posedă proprietatea P , atunci vom scrie $A = \{x | x \text{ verifică } P\}$ sau $A = \{x | P(x)\}$ și vom citi: A constă din acele și numai acele elemente ce posedă proprietatea P (pentru care predicatul $P(x)$ este adevărat).

Vom folosi notațiile:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale nenule;

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi nenule;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ – mulțimea numerelor raționale;

$\mathbb{Q}^*$ – mulțimea numerelor raționale nenule;

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale;

$\mathbb{R}^*$ – mulțimea numerelor reale nenule;

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$;

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – mulțimea numerelor complexe;

$\mathbb{C}^*$ – mulțimea numerelor complexe nenule;

$m \in \{1, 2, \dots, n\} \Leftrightarrow m = \overline{1, n}$;

$D(a) = \{c \in \mathbb{Z}^* \mid a:c\}$ – mulțimea tuturor divizorilor întregi ai numărului $a \in \mathbb{Z}$;

$n(A) = |A|$ – numărul elementelor mulțimii finite A .

Notă. Vom considera cititorul familiarizat cu simbolurile logice: conjuncția $\wedge$ (... și ...), disjuncția $\vee$ (... sau ...), implicația $\Rightarrow$, cuantificatorul existențial ($\exists$) și cuantificatorul universal ($\forall$).

Fie A și B două mulțimi. Dacă toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B , atunci spunem că A **este inclusă în** B sau că A este o **parte a lui** B , sau că A este o **submulțime** a mulțimii B și notăm $A \subseteq B$. Deci

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall) x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Proprietățile incluziunii: a) $(\forall) A, A \subseteq A$ (reflexivitate);

b) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (tranzitivitate); c) $(\forall) A, \emptyset \subseteq A$.

Dacă A nu este o parte a mulțimii B , atunci scriem $A \not\subseteq B$, adică

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists) x (x \in A \wedge x \notin B).$$

Vom spune că **mulțimea** A **este egală cu mulțimea** B , pe scurt $A = B$, dacă ele constă din unele și aceleași elemente, adică

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Proprietățile egalității. Oricare ar fi mulțimile A, B și C , avem:

a) $A = A$ (reflexivitate); b) $(A = B) \Rightarrow (B = A)$ (simetrie);

c) $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow (A = C)$ (tranzitivitate).

Prin $P(A)$ vom nota **mulțimea tuturor părților mulțimii** A , adică

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A.$$

Evident, $\emptyset, A \in P(A)$.

Mulțimea **universală**, mulțimea ce conține toate mulțimile examinate în continuare, natura elementelor cărora este una și aceeași, o vom nota prin E .

Operații cu mulțimi

Fie A și B două mulțimi, $A, B \in P(E)$.

1. Intersecția.

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \wedge x \in B\},$$

adică

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B), \quad (1)$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B). \quad (1')$$

2. Reuniunea.

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \vee x \in B\},$$

adică

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B), \quad (2)$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B). \quad (2')$$

3. Diferența.

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A \wedge x \notin B\},$$

adică

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B), \quad (3)$$

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B). \quad (3')$$

4. Complementara unei mulțimi. Fie $A \in P(E)$. Diferența $E \setminus A$ este o submulțime a lui E , notată $C_E(A)$ și numită **complementara lui A în raport cu E** , adică

$$C_E(A) = E \setminus A = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Cu alte cuvinte,

$$x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A, \quad (4)$$

$$x \notin C_E(A) \Leftrightarrow x \in A. \quad (4')$$

Proprietăți ale operațiilor cu mulțimi

$A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (legile de idempotență).

$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (legile de comutativitate).

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (legile de asociativitate).

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (legile de distributivitate).

$A \cup (A \cap B) = A$,
 $A \cap (A \cup B) = A$ (legile de absorbție).

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B), \quad (\text{legile lui de Morgan}).$$

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$$

Două submulțimi "privilegiate" ale lui E sunt $\emptyset$ și E . Pentru orice $A \in P(E)$, avem:

$$\begin{aligned} \emptyset &\subseteq A \subseteq E, \\ A \cup \emptyset &= A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad C_E(\emptyset) = E, \\ A \cup E &= E, \quad A \cap E = A, \quad C_E(E) = \emptyset, \\ A \cup C_E(A) &= E, \quad A \cap C_E(A) = \emptyset, \\ C_E(C_E(A)) &= A \quad (\text{principiul reciprocității}). \end{aligned}$$

Ulterior vom folosi notația $C_E(A) = \bar{A}$.

5. Diferența simetrică.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proprietăți. Oricare ar fi mulțimile A, B și C , avem:

- a) $A \Delta A = \emptyset$; b) $A \Delta B = B \Delta A$ (**comutativitatea**);
 c) $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$; d) $A \Delta (A \Delta B) = B$;
 e) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (**asociativitatea**);
 f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$; g) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

6. Produs cartezian. Fie x și y două obiecte. Mulțimea $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ ale cărei elemente sunt mulțimile $\{x\}$ și $\{x, y\}$ se numește **pereche ordonată** (sau **cuplu ordonat**) cu prima componentă x și a doua componentă y și se notează cu (x, y) . Având trei obiecte x, y și z , notăm $(x, y, z) = ((x, y), z)$ și numim **triplet ordonat**.

În general, având n obiecte $x_1, x_2, \dots, x_n$, notăm

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\dots((x_1, x_2), x_3), \dots x_n)$$

și numim **sistem ordonat** de n elemente (sau **cortej** de lungimea n).
 Avem

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n).$$

Fie $A, B \in P(E)$. Mulțimea

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

se numește **produs cartezian** al mulțimilor A și B . Evident, putem defini

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) | x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}.$$

Mai general, produsul cartezian al mulțimilor $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Pentru $A = B = C = A_1 = A_2 = \dots = A_n$, avem

$$A \times A \stackrel{\text{def}}{=} A^2, \quad A \times A \times A \stackrel{\text{def}}{=} A^3, \quad \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ ori}} \stackrel{\text{def}}{=} A^n.$$

De exemplu $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Submulțimea

$$\Delta = \{(a, a) | a \in A\} \subseteq A^2$$

poartă numele de **diagonală** a mulțimii A^2 .

Exemple. 1. Fie $A = \{1, 2\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$. Atunci

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

și

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Observăm că $A \times B \neq B \times A$.

2. Produsul cartezian $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se poate reprezenta geometric ca mulțimea tuturor punctelor unui plan în care s-a fixat un sistem rectangular de coordonate xOy , asociind fiecărui element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ punctul $P(x, y)$ din plan de abscisă x și ordonată y . Fie $A = [2; 3]$ și $B = [1; 5]$ ($A, B \subseteq \mathbb{R}$). Atunci $A \times B$ are ca reprezentare în plan dreptunghiul hașurat $KLMN$ (fig. 1.1), unde $K(2, 1)$, $L(2, 5)$, $M(3, 5)$, $N(3, 1)$.

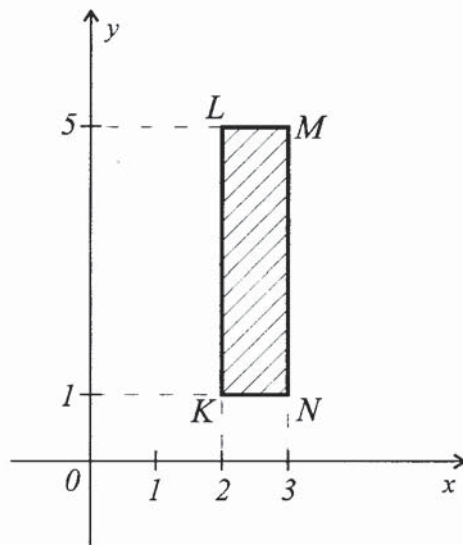


Fig. 1.1

Se verifică ușor proprietățile:

$$a) (A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D;$$

$$b) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

$$c) A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset),$$

$$A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset).$$

7. Intersecția și reuniunea unei familii de mulțimi. O familie de mulțimi este o mulțime $\{A_i | i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$ ale cărei

elemente sunt mulțimile $A_i, i \in I, A_i \in P(E)$. Spunem că $\{A_i | i \in I\}$ este o familie de mulțimi **indexate** cu mulțimea I .

Fie o familie de mulțimi $\{A_i | i \in I\}$. **Reuniunea** sa (sau reuniunea mulțimilor $A_i, i \in I$) este mulțimea

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E | (\exists) i \in I: x \in A_i\}.$$

Intersecția familiei date (sau intersecția mulțimilor $A_i, i \in I$) este mulțimea

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E | x \in A_i, (\forall) i \in I\}.$$

În cazul $I = \{1, 2, \dots, n\}$, scriem

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

8. Diagramele Euler-Wenn. Diagrame ale lui Euler (în SUA – ale lui Wenn) se numesc figurile cu ajutorul cărora se interpretează mulțimile (cercuri, pătrate, dreptunghiuri etc.) și se demonstrează ilustrativ unele proprietăți ale operațiilor cu mulțimi. Vom folosi cercurile lui Euler.

Exemplu. Folosind diagramele lui Euler, să se demonstreze legea lui de Morgan

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

Soluție.

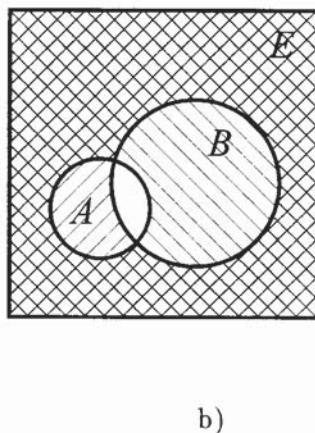
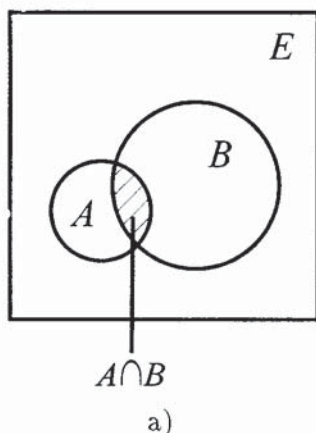


Fig. 1.2

În fig. 1.2,a) partea hașurată este $A \cap B$; cea nehașurată (cea în afara $A \cap B$) reprezintă $C_E(A \cap B)$.

În fig. 1.2,b) partea pătratului hașurată cu \\\\\ este egală cu $C_E(A)$, iar cea hașurată cu /// este egală cu $C_E(B)$. Toată partea hașurată formează $C_E(A) \cup C_E(B)$ (partea nehașurată este exact $A \cap B$).

Din aceste două figuri se vede că $C_E(A \cap B)$ (partea pătratului nehașurată în fig. 1.2,a) coincide cu $C_E(A) \cup C_E(B)$ (partea oricum hașurată din fig. 1.2,b), adică

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

1.2. Exerciții rezolvate

1. Pentru orice două mulțimi A și B , avem

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Soluție. Folosind definițiile operațiilor cu mulțimi, obținem succesiv:

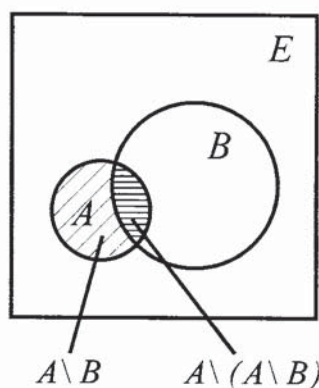
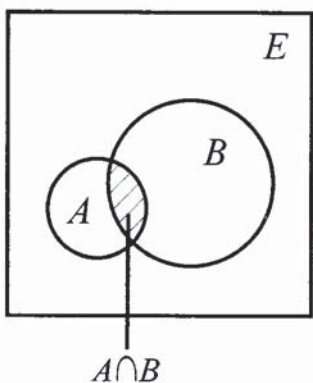
$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \setminus B) &\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin (A \setminus B)) \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(3')}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x \in A \cap B. \end{aligned}$$

Din acest șir de echivalențe rezultă

$$A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B \text{ și } A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B),$$

ceea ce demonstrează egalitatea cerută.

Remarcă. Egalitatea poate fi demonstrată și cu ajutorul diagramelor lui Euler.



Deci $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

2. Oricare ar fi $A, B \subseteq E$, are loc egalitatea

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Soluție. Metoda analitică. Folosind definițiile operațiilor cu mulțimi, obținem:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cap \overline{B}) \vee x \in (\overline{A} \cap B)) \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} ((x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \in B)) \Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in \overline{A}) \wedge (x \in A \vee \\ &\quad \vee x \in B) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in B)) \stackrel{(2), (4')}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (x \in (A \cup B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \stackrel{(1')}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cup B) \wedge x \in (\overline{A \cap B})) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}). \end{aligned}$$

Acest șir de echivalențe demonstrează că egalitatea din enunț este adevărată.

Metoda grafică. Folosind cercurile lui Euler, avem

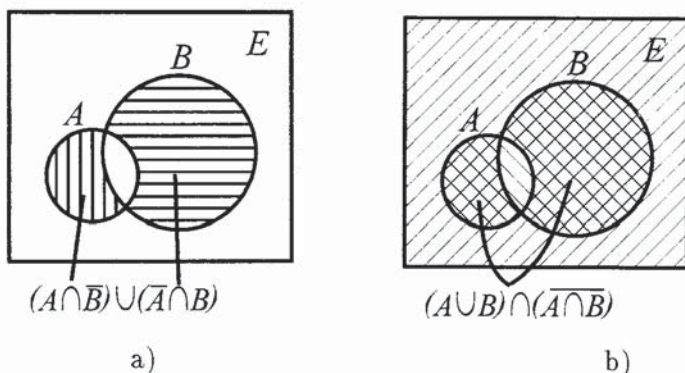


Fig. 1.3

În fig. 1.3,a) avem $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, ceea ce reprezintă partea hașurată a pătratului. Din fig. 1.3 se vede că $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

3. Pentru oricare două mulțimi $A, B \subseteq E$, este adevărată echivalența

$$A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B.$$

Soluție. Fie $A \setminus B = B \setminus A$. Presupunem că $A \neq B$. Atunci există $a \in A$ cu $a \notin B$ sau $b \in B$ cu $b \notin A$.

În primul caz, obținem $a \in A \setminus B$ și $a \notin B \setminus A$, ceea ce contrazice egalitatea $A \setminus B = B \setminus A$. În al doilea caz, obținem aceeași contradicție.

Deci dacă $A \setminus B = B \setminus A \Rightarrow A = B$.

Reciproc, evident.

4. Sunt date mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ și $C = \{3, 6, 9\}$. Să se verifice egalitățile:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Soluție. a) Avem $B \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $A \setminus (B \cup C) = \{1, 5, 7\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A \setminus C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1, 5, 7\} = A \setminus (B \cup C)$.

b) Pentru egalitatea a doua, avem

$$B \cap C = \{6\}, A \setminus (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}, \\ (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} = A \setminus (B \cap C).$$

5. Să se determine mulțimile A și B ce satisfac simultan condițiile:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$;

3) $1 \notin A \setminus B$;

4) $2 \notin B \setminus A$.

Soluție. Din 1) și 2) rezultă $\{3, 4, 5\} \subseteq A \subseteq A \cup B$ și $\{3, 4, 5\} \subseteq B \subseteq A \cup B$. Din 3) rezultă $1 \notin A$ sau $1 \in B$. Dacă $1 \notin A$, atunci din $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ rezultă $1 \in B$. Însă dacă $1 \in B$, atunci $1 \notin A$, deoarece în caz contrar $1 \in A \cap B = \{3, 4, 5\}$. Deci rămâne $1 \in B$ și $1 \notin A$. În mod analog, din 4) urmează $2 \notin B$ și deci $2 \in A$. Cu alte cuvinte,

$\{3, 4, 5\} \subseteq A \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$ și $\{3, 4, 5\} \subseteq B \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$
cu $2 \in A \cup B$, $1 \in A \cup B$ și de aceea $A = \{2, 3, 4, 5\}$, iar $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

Răspuns: $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

6. Fiind date mulțimile $A = \{11k + 8 | k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4m | m \in \mathbb{Z}\}$ și $C = \{11(4n + 1) - 3 | n \in \mathbb{Z}\}$, să se arate că $A \cap B = C$.

Soluție. Pentru a obține egalitatea cerută, vom demonstra adevărul echivalenței

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in C.$$

Fie $x \in A \cap B$. Atunci $x \in A$ și $x \in B$ și de aceea există două numere întregi $k, m \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x = 11k + 8 = 4m \Leftrightarrow 11k = 4(m - 2)$. În această egalitate membrul drept este divizibil prin 4, iar 11 cu 4 sunt primi între ei. Deci din $11k : 4$ rezultă $k : 4$, adică

$k = 4t$ pentru un $t \in \mathbf{Z}$. Atunci

$x = 11k + 8 = 11 \cdot 4t + 8 = 11 \cdot 4t + 11 - 3 = 11(4t + 1) - 3$,
ceea ce implică $x \in C$, adică am demonstrat implicația

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in C. \quad (1)$$

Reciproc, fie $y \in C$. Atunci există $s \in \mathbf{Z}$ cu
 $y = 11(4s + 1) - 3 = 11 \cdot 4s + 11 - 3 = 11 \cdot 4s + 8 = 4(11s + 2)$.

Luând $4s = u \in \mathbf{Z}$ și $11s + 2 = v \in \mathbf{Z}$, obținem

$$y = 11u + 8 = 4v \in A \cap B,$$

ceea ce demonstrează adevărul implicației

$$y \in C \Rightarrow y \in A \cap B. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă egalitatea cerută.

7. Sunt date mulțimile

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 2x \leq 4x - 6 \\ 4x - 11 < 2x + 1 \end{cases} \right\} \text{ și } B = A \cap \mathbb{N}.$$

Să se determine:

- a) toate mulțimile X cu $B \cup X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- b) toate mulțimile $Y = \{y \in \mathbf{Z} \mid y^2 \in B \cup X\}$, astfel încât $B \cap Y = \{3\}$.

Soluție. Determinăm mulțimea A :

$$\begin{cases} 2x \leq 4x - 6, \\ 4x - 11 < 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 6, \\ 2x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 6).$$

Atunci $B = [3; 6) \cap \mathbb{N} = \{3, 4, 5\}$.

a) Toate submulțimile posibile ale lui B sunt

$$\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\} = B.$$

Mulțimile căutate X sunt astfel, încât $X \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și deci vor fi de forma $X = C \cup \{6, 7, 8, 9\}$, unde $C \in P(B)$, adică mulțimile cerute în p. a) sunt:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{6, 7, 8, 9\}, X_2 = \{3, 6, 7, 8, 9\}, X_3 = \{4, 6, 7, 8, 9\}, \\ X_4 &= \{5, 6, 7, 8, 9\}, X_5 = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}, X_6 = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ X_7 &= \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}, X_8 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

b) Deoarece $y \in \mathbf{Z}$, atunci $y^2 \in \mathbb{N}$ și viceversa. Ținând cont de $y^2 \in B \cup X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, obținem $y^2 \in \{4, 9\}$, adică $y \in \{-3, -2, 2, 3\} = M$. Părțile mulțimii M sunt:

$$\emptyset, \{-3\}, \{-2\}, \{2\}, \{3\}, \{-3, -2\}, \{-3, 2\}, \{-3, 3\}, \{-2, 2\}, \{-2, 3\}, \{2, 3\}, \{-3, -2, 2\}, \{-3, -2, 3\}, \{-3, 2, 3\}, \{-2, 2, 3\}, M.$$

Din condiția $B \cap Y = \{3\}$ rezultă că Y este una din mulțimile $Y_1 = \{3\}$, $Y_2 = \{-3, 3\}$, $Y_3 = \{-2, 3\}$, $Y_4 = \{2, 3\}$, $Y_5 = \{-3, -2, 3\}$,

$$Y_6 = \{-3, 2, 3\}, Y_7 = \{-2, 2, 3\} \text{ și } Y_8 = M = \{-3, -2, 2, 3\}.$$

Răspuns: a) $X \in \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\};$

b) $Y \in \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8\}.$

8. Să se determine $A, B, C \subseteq T$ și $A \Delta B$, dacă

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \Delta C = \{1, 2\}, B \Delta C = \{5, 6\},$$

$$A \cap C = B \cap C = \{3, 4\}.$$

Soluție. Din $A \cap C = B \cap C = \{3, 4\}$ rezultă că $\{3, 4\} \subseteq A \cap B \cap C$.
Știm că

$$A \Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus (A \cap C),$$

$$B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus (B \cap C).$$

Atunci

$$1 \in A \Delta C \Leftrightarrow (1 \in A \cup C \wedge 1 \notin A \cap C) \Leftrightarrow ((1 \in A \vee 1 \in C) \wedge 1 \notin A \cap C).$$

Sunt posibile cazurile:

a) $1 \notin A$ și $1 \in C$;

b) $1 \in A$ și $1 \notin C$

(cazul trei, $1 \in A$ și $1 \in C \Rightarrow 1 \in A \cap C = \{3, 4\}$, este imposibil).

În primul caz, $1 \notin A$ și $1 \in C$, din $B \Delta C = \{5, 6\}$ rezultă $1 \in B$, fiindcă în caz contrar $1 \notin B$ și $1 \in C \Rightarrow 1 \in C \setminus B \subseteq B \Delta C = \{5, 6\}$. Deci, în acest caz avem $1 \in B \cap C = \{3, 4\}$, ceea ce este imposibil și rămâne $1 \in A$, $1 \notin C$. În mod analog obținem $2 \in A$, $2 \notin B$ și $2 \notin C$, $5 \in B$ și $5 \notin A$, $5 \notin C$, $6 \in B$ și $6 \notin A$, $6 \notin C$.

Cu alte cuvinte, am obținut:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{3, 4\} \text{ și } A \Delta B = \{1, 2, 5, 6\}.$$

Răspuns: $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{3, 4\}$ și
 $A \Delta B = \{1, 2, 5, 6\}.$

9. Se dau mulțimile $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Să se determine mulțimile:

a) $A \times B$;

b) $B \times A$;

c) A^2 ;

d) B^2 ;

e) $(A \times B) \cap (B \times A)$;

f) $(A \cup B) \times B$;

g) $(A \times B) \cup (B \times A)$.

Soluție. Folosind definiția produsului cartezian a două mulțimi, obținem:

$$a) A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\};$$

$$b) B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\};$$

$$c) A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\};$$

- d) $B^2 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;
 e) $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2, 2)\}$;
 f) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$; $(A \cup B) \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;
 g) $(A \times B) \cup (B \times A) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} = (A \cup B) \times B$.

10. Se dau mulțimile $A = \{1, 2, x\}$, $B = \{3, 4, y\}$. Să se determine x și y , știind că $\{1, 3\} \times \{2, 4\} \subseteq A \times B$.

Soluție. Formăm mulțimile $A \times B$ și $\{1, 3\} \times \{2, 4\}$:

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, y), (2, 3), (2, 4), (2, y), (x, 3), (x, 4), (x, y)\};$$

$$C = \{1, 3\} \times \{2, 4\} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}.$$

Deoarece $\{1, 3\} \times \{2, 4\} \subseteq A \times B$, obținem

$$(1, 2) \in C \Rightarrow (1, 2) \in A \times B \Rightarrow (1, y) = (1, 2) \Rightarrow y = 2;$$

$$(3, 4) \in C \Rightarrow (3, 4) \in A \times B \Rightarrow (3, 4) = (x, 4) \Rightarrow x = 3.$$

Pentru $x = 3$ și $y = 2$, avem $(3, 2) \in A \times B$.

Răspuns: $x = 3$, $y = 2$.

11. Dacă $A \supseteq B$, atunci

$$A \times B = ((A \setminus B) \times B) \cup B^2.$$

Demonstrați.

Soluție. $B \subseteq A \Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$ și de aceea

$$A \times B = ((A \setminus B) \cup B) \times B = ((A \setminus B) \times B) \cup (B \times B) = ((A \setminus B) \times B) \cup B^2$$

(am utilizat egalitatea $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$).

12. Câte elemente are mulțimea

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \mid x = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1}, n = \overline{1, 1000} \right\}?$$

Soluție. Mulțimea A are atâtea elemente câte valori diferite are fracția $(n^2 + 1)/(2n^2 + n + 1)$, când n ia valorile $1, 2, 3, \dots, 1000$. Alegem valorile lui n pentru care fracția ia valori egale.

$$\begin{aligned} \text{Fie } m, l \in \mathbf{N}^*, m < l \text{ cu } \frac{m^2 + 1}{2m^2 + m + 1} &= \frac{l^2 + 1}{2l^2 + l + 1}. \text{ Atunci} \\ (m^2 + 1)(2l^2 + l + 1) &= (l^2 + 1)(2m^2 + m + 1) \Leftrightarrow (m - l)(m + l - ml + 1) = \\ = 0 &\stackrel{m \neq l}{\Leftrightarrow} m + l - ml + 1 = 0 \Leftrightarrow m(l - 1) = l + 1 \Leftrightarrow m = \frac{l + 1}{l - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m &= \frac{(l - 1) + 2}{l - 1} \Leftrightarrow m = 1 + \frac{2}{l - 1}. \end{aligned}$$

Însă $m \in \mathbb{N}^*$ și de aceea

$$m \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{2}{l-1} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2:(l-1) \Leftrightarrow \begin{cases} l-1=1, \\ l-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l=2, \\ l=3. \end{cases}$$

Pentru $l=2$, obținem $m=3$, iar pentru $l=3$, avem $m=2$. Ținând cont de faptul că $m < l$, obținem $m=2$ și $l=3$. Deci numai pentru $n=2$ și $n=3$, se obține același element al mulțimii A : $x=5/11$.

Răspuns: mulțimea A are 999 de elemente, adică $n(A)=999$.

13. Să se determine numerele întregi x, y pentru care afirmația $(x-1) \cdot (y-3) = 13$ este adevărată.

Soluție. Notăm

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid P(x): (x-1) \cdot (y-3) = 13\}.$$

Deoarece 13 este număr prim, iar $x, y \in \mathbb{Z}$, sunt posibile cazurile:

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y-3=13, \end{cases} \begin{cases} x-1=-1, \\ y-3=-13, \end{cases} \begin{cases} x-1=13, \\ y-3=1, \end{cases} \begin{cases} x-1=-13, \\ y-3=-1, \end{cases}$$

adică propoziția $P(x)$ este adevărată numai în situațiile:

$$\begin{cases} x=2, \\ y=16, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=-10, \end{cases} \begin{cases} x=14, \\ y=4, \end{cases} \begin{cases} x=-12, \\ y=2. \end{cases}$$

Răspuns: $A = \{(2, 16), (0, -10), (14, 4), (-12, 2)\}$.

14. Să se determine mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Soluție. Deoarece $\sqrt{a+x} \geq 0$, $\sqrt{b+x} \geq 0$, $\sqrt{c+x} \geq 0$, rezultă că egalitatea $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$ este posibilă, dacă și numai dacă avem simultan:

$$a+x=b+x=c+x=0 \Leftrightarrow x=-a=-b=-c.$$

Atunci:

a) dacă cel puțin două dintre numerele a, b și c sunt diferite, nu putem avea egalitatea $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$, adică în acest caz $A = \emptyset$;

b) dacă $a=b=c$, atunci $x=-a$ și $A = \{-a\}$.

Răspuns: 1) pentru $a=b=c$, avem $A = \{-a\}$; 2) dacă cel puțin două din numerele a, b și c sunt diferite, atunci $A = \emptyset$.

15. Să se determine mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \min(x+2, 4-x/3) \geq 1\}.$$

Soluție. Sunt posibile situațiile:

$$x + 2 \leq 4 - x/3 \text{ sau } x + 2 > 4 - x/3.$$

Examinăm fiecare caz aparte:

$$1) x + 2 \leq 4 - x/3 \Leftrightarrow 3x + 6 \leq 12 - x \Leftrightarrow 4x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3/2.$$

În acest caz, avem:

$$\min(x + 2, 4 - x/3) \geq 1 \Leftrightarrow x + 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Toate numerele întregi x pentru care $-1 \leq x \leq 3/2$ sunt: $-1, 0, 1$.

$$2) x + 2 > 4 - x/3 \Leftrightarrow x > 3/2. \text{ Atunci}$$

$$\min(x + 2, 4 - x/3) \geq 1 \Leftrightarrow 4 - x/3 \geq 1 \Leftrightarrow 12 - x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq 9.$$

Toate numerele întregi x pentru care $3/2 < x \leq 9$ sunt: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Am obținut astfel:

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Răspuns: $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

16. Să se determine valorile parametrului real m pentru care mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{R} | (m-1)x^2 - (3m+4)x + 12m+3 = 0\}$$

are:

- a) un element;
- b) două elemente;
- c) este vidă.

Soluție. Mulțimea A coincide cu mulțimea soluțiilor ecuației pătrate

$$(m-1)x^2 - (3m+4)x + 12m+3 = 0 \quad (1)$$

și rezolvarea problemei s-a redus la determinarea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația are o soluție, două soluții diferite și nu are soluții.

a) Ecuația (1) are o singură (două egale) soluție, dacă și numai dacă $D = 0$ pentru $a = m-1 \neq 0$ sau în cazul când $a = m-1 = 0$.
Examinăm aceste cazuri:

$$1) D = (3m+4)^2 - 4(m-1)(12m+3) = -39m^2 + 60m + 28 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \\ m = \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}. \end{cases}$$

2) Pentru $m = 1$, ecuația (1) ia forma $-5x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Deci mulțimea A constă dintr-un singur element pentru

$$m \in \left\{ \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, 1, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right\}.$$

b) Ecuația (1) are două rădăcini diferite, dacă și numai dacă $D > 0$, adică

$$D > 0 \Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right).$$

c) Ecuația (1) nu are rădăcini $\Leftrightarrow D < 0 \Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39} \right) \cup \left(\frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}, +\infty \right).$

$$\text{Răspuns: a) } m \in \left\{ \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, 1, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right\};$$

$$\text{b) } m \in \left\{ \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right\};$$

$$\text{c) } m \in \left(-\infty, \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39} \right) \cup \left(\frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}, +\infty \right).$$

17. Fie mulțimile $A = \{3, 4, 5\}$ și $B = \{4, 5, 6\}$. Să se scrie elementele mulțimilor $A^2 \cap B^2$ și $(A \setminus (B \setminus A)) \times (B \cap A)$.

Soluție. a) Pentru prima mulțime avem:

$$A^2 = \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\},$$

$$B^2 = \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\},$$

$$A^2 \cap B^2 = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}.$$

b) Pentru mulțimea a doua avem:

$$B \setminus A = \{6\}, A \setminus (B \setminus A) = A, B \cap A = \{4, 5\}.$$

$$\text{Atunci } A \times (B \cap A) = \{(3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}.$$

$$\text{Răspuns: } A^2 \cap B^2 = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\};$$

$$A \setminus (B \setminus A) \times (B \cap A) = \{(3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}.$$

18. Fiind date mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ și $B = \{2, 3, 4\}$, să se rezolve ecuațiile $A \Delta X = A \setminus B$ și $(A \Delta Y) \Delta B = C_A(B)$.

Soluție. Pentru a rezolva ecuațiile din enunț, folosim proprietățile diferenței simetrice: $A \Delta (A \Delta B) = B$, asociativitatea și comutativitatea ei.

a) $A \Delta X = A \setminus B \Rightarrow A \Delta (A \Delta X) = A \Delta (A \cap B) \Rightarrow X = A \Delta (A \setminus B)$.
Însă $A \setminus B = \{1, 5, 6, 7\}$, $A \setminus (A \setminus B) = \{2, 3, 4\}$, $(A \setminus B) \setminus A = \emptyset$ și de aceea

$$\begin{aligned} X &= A \Delta (A \setminus B) = (A \setminus (A \setminus B)) \cup ((A \setminus B) \setminus A) = \\ &= A \setminus (A \setminus B) = \{2, 3, 4\} = B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (A \triangle Y) \triangle B &= A \setminus B \Leftrightarrow (A \triangle B) \triangle Y = A \setminus B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A \triangle B) \triangle ((A \triangle B) \triangle Y) = (A \triangle B) \triangle (A \setminus B) \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow Y = (A \triangle B) \triangle (A \setminus B). \end{aligned}$$

Calculăm

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 5, 6, 7\} \cup \emptyset = \{1, 5, 6, 7\}.$$

Deci

$$Y = (A \setminus B) \triangle (A \setminus B) = \emptyset.$$

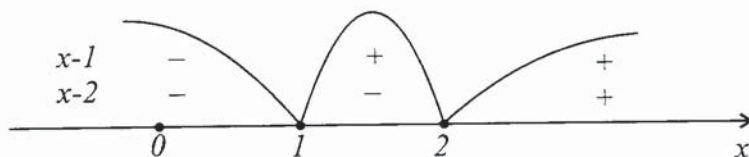
Răspuns: $X = B$, $Y = \emptyset$.

19. Sunt date mulțimile

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + |2-x| > 3+x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-4) \times (x+3)(x+2)^2 \leq 0\}$. Să se determine mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \cup B) \setminus (B \setminus A)$ și $\overline{A} \times (B \setminus A)$.

Soluție. 1) Determinăm mulțimile A și B .

$$\text{a) } x \in A \Leftrightarrow |x-1| + |2-x| > 3+x \Leftrightarrow |x-1| + |x-2| > 3+x \quad (*)$$



Inecuația $*$ este echivalentă cu totalitatea a trei sisteme de inecuații:

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, 1), \\ 1-x+2-x > 3+x, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in [1; 2), \\ x-1+2-x > 3+x, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in [2, +\infty), \\ x-1+x-2 > 3+x, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, 1), \\ x < 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in [1; 2), \\ x < -2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in [2, +\infty), \\ x > 6 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 0), \\ x \in \emptyset, \\ x \in (6, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty). \end{aligned}$$

Deci

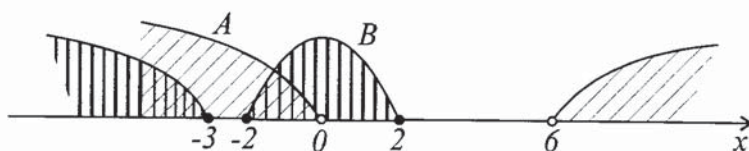
$$A = (-\infty, 0) \cup (6, +\infty).$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x \in B &\Leftrightarrow (x^2-4)(x+3)(x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^3(x+3)(x-2) \leq \\ &\leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [-2; 2]. \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte,

$$B = (-\infty, -3] \cup [-2; 2].$$

2) Determinăm mulțimile cerute cu ajutorul reprezentării grafice



a) $A \cup B = (-\infty, 2] \cup (6, +\infty)$

b) $A \cap B = (-\infty, -3] \cup [-2; 0)$

c) $\overline{A} = C_{\mathbb{R}}(A) = [0; 6]$

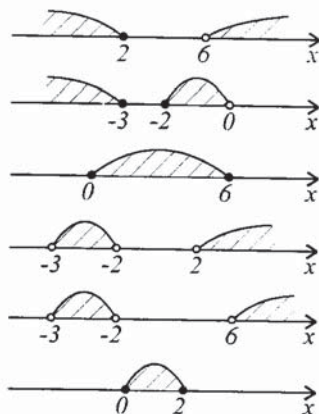
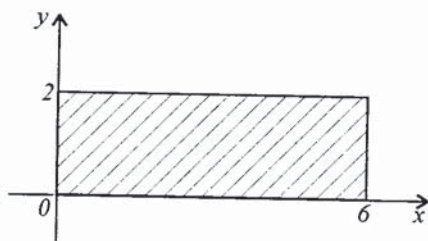
d) $\overline{B} = C_{\mathbb{R}}(B) = (-3, -2) \cup (2, +\infty)$

e) $A \setminus B = (-3, -2) \cup (6, +\infty)$

f) $B \setminus A = [0; 2]$

g) $(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = \emptyset$

h) $\overline{A} \times (B \setminus A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0; 6], y \in [0; 2]\}$



20. 40 de elevi au scris o lucrare de control la matematică, care conține o problemă, o inecuație și o identitate. Trei elevi au rezolvat corect numai problema, 5 elevi numai inecuația, 4 elevi au demonstrat numai identitatea, 7 elevi nu au rezolvat numai problema, 6 elevi – numai inecuația, 5 elevi nu au demonstrat numai identitatea. Ceilalți elevi au rezolvat totul corect. Câți elevi de aceștia sunt?

Soluție. Fie A mulțimea elevilor care au rezolvat corect numai

problema. B – numai inecuația, C – au demonstrat numai identitatea, D – mulțimea elevilor care au rezolvat numai problema și inecuația, E – mulțimea elevilor care au rezolvat numai problema și au demonstrat identitatea, F – mulțimea elevilor care au rezolvat numai inecuația și au demonstrat identitatea, iar G – mulțimea elevilor care au rezolvat totul corect.

Din condițiile puse rezultă că $n(A) = 3$, $n(B) = 5$, $n(C) = 4$, $n(D) = 8$, $n(E) = 7$, $n(F) = 9$.

Dar deoarece fiecare din elevii care au scris lucrarea a rezolvat cel puțin un punct al lucrării corect și întrucât mulțimile A, B, C, D, E, F, G au ca elemente comune numai elementele mulțimii vide, reuniunea mulțimilor A, B, C, D, E, F, G este mulțimea elevilor care au scris lucrarea.

Prin urmare, $n(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E) + n(F) + n(G)$. Deci $n(G) = n(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G) - n(A) - n(B) - n(C) - n(D) - n(E) - n(F) = 40 - 3 - 5 - 4 - 8 - 7 - 9 = 4$.

Răspuns: Deci 4 elevi dintre cei care au scris lucrarea au rezolvat totul corect.

21. (Problema matematicianului Dodjson.)

Într-o luptă încordată 72 din 100 de pirați au pierdut un ochi, 75 – o ureche, 80 – o mână și 85 – un picior. Ce număr minim de pirați au pierdut în același timp ochiul, urechea, mâna și piciorul?

Soluție. Notăm prin A mulțimea piraților cu un ochi, prin B – mulțimea piraților cu o ureche, prin C – mulțimea piraților cu o mână și prin D – mulțimea piraților cu un picior.

În problemă se cere de apreciat mulțimea $A \cap B \cap C \cap D$.

Este evident că mulțimea universală E este alcătuită din mulțimea $A \cap B \cap C \cap D$ și din numărul piraților care au păstrat ori ambii ochi, ori amândouă urechi, ori amândouă mâni, ori amândouă picioare.

De aceea $E = (A \cap B \cap C \cap D) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$. De aici reiese că mulțimea E nu este mai mică (nu are un număr mai mic de elemente) decât suma numerelor de elemente ale mulțimilor $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ și $A \cap B \cap C \cap D$ (egalitatea ar fi avut loc numai în cazul când mulțimile $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ și $\overline{D}$ două câte două nu se intersectează).

Dar $n(\overline{A}) = 30$, $n(\overline{B}) = 25$, $n(\overline{C}) = 20$, și $n(\overline{D}) = 15$. Deci substituind, avem $n(E) = 100$, adică $100 \leq n(A \cap B \cap C \cap D) + 30 + 25 + 20 + 15$. Prin urmare, $n(A \cap B \cap C \cap D) \geq 100 - 30 - 25 - 20 - 15 =$

= 10.

Așadar, nu mai puțin de 10 pirați au pierdut în același timp ochiul, urechea, mâna și piciorul.

Răspuns: Nu mai puțin de 10 pirați.

22. Din 100 de elevi 28 studiază limba engleză, 8 – limbile engleză și germană, 10 – limbile engleză și franceză, 5 – limbile franceză și germană, 3 elevi studiază toate trei limbi. Câți elevi studiază numai o limbă? Câți elevi nu studiază nici o limbă?

Soluție. Fie A mulțimea elevilor care studiază limba engleză, B – limba germană, C – limba franceză.

Atunci mulțimea elevilor care studiază limbile engleză și germană este $A \cap B$, engleză și franceză – $A \cap C$, franceză și germană – $B \cap C$, engleză, germană și franceză – $A \cap B \cap C$, mulțimea elevilor care studiază cel puțin una din aceste trei limbi este $A \cup B \cup C$.

Din condițiile de mai sus rezultă că elevii care studiază numai limba engleză alcătuiesc mulțimea $A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))$, numai germana – $B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C))$, numai franceza – $C \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))$.

Dar deoarece $A \cap B \subseteq A$, avem $n(A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))) = n(A) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) = n(A) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)) =$
 $= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$

În mod analog, $n(B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C))) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C);$
 $n(C \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$

Fie D mulțimea elevilor care studiază numai o limbă, atunci
 $n(D) = n(A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))) + n(B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C))) +$
 $+ n(C \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))).$

Prin urmare, $n(D) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) +$
 $+ n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(C) - n(A \cap C) -$
 $- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) -$
 $- 2n(A \cap C) - 2n(B \cap C) + 3n(A \cap B \cap C) = 28 + 30 + 42 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 5 +$
 $+ 3 \cdot 3 = 63. n(D) = 63.$

Numărul elevilor care nu studiază nici o limbă este egal cu diferența dintre numărul total de elevi și numărul elevilor care studiază cel puțin una din aceste limbi, adică $n(H) = n(T) - n(A \cup B \cup C)$, unde H este mulțimea elevilor care nu studiază nici o limbă, iar T – mulțimea celor 100 de elevi.

Din problema 20 avem $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) -$

$$-n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C) = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80. \text{ Deci } n(H) = 100 - 80 = 20.$$

Răspuns: 63 de elevi studiază numai o limbă, 20 de elevi nu studiază nici o limbă.

1.3. Exerciții propuse

1. Care din afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false?

- | | |
|--|---|
| a) $x \in \{x\}$; | b) $x = \{x\}$; |
| c) $x \neq \{x\}$; | d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; |
| e) $\emptyset = \{\emptyset\}$; | f) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; |
| g) $\emptyset = \{a\}$; | h) $\emptyset \in \{a\}$; |
| i) $\emptyset \subseteq \{a\}$; | j) $\{x\} \subseteq \{x\}$; |
| k) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$; | l) $\{1, 3, 3\} = \{1, \{2, 3\}, 3\}$; |
| m) $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 1, 3, 5, 2, 4, 5\}$; | n) $\{3-1, 6+3\} = \{2, 5+3\}$; |
| o) $\{a+a\} = \{2a\}, a \in \mathbb{R}.$ | |

2. Care din următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false (A, B și C sunt mulțimi arbitrare)?

- $(A \in B \text{ și } B \in C) \Rightarrow A \in C$;
- $(A \subseteq B \text{ și } B \in C) \Rightarrow A \in C$;
- $(A \neq B \text{ și } B \neq C) \Rightarrow A \neq C$;
- $(A \cap B \subseteq \overline{C} \text{ și } A \cup C \subseteq B) \Rightarrow A \cap C = \emptyset$;
- $(A \subseteq (\overline{B \cup C}) \text{ și } B \subseteq (\overline{A \cup C})) \Rightarrow B = \emptyset$;
- $(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq C \text{ și } C \subseteq A) \Rightarrow A = B = C$;
- $P(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 | A_1 \in P(A), B_1 \in P(B)\}$;
- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;
- $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$;
- $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$;
- $E \subseteq A \Rightarrow A = E$;
- $A \subseteq B \Rightarrow B \cup C \subseteq A \cup C$;
- $A \subseteq \overline{B} \Rightarrow B \subseteq \overline{A}$;
- $A \subseteq \overline{B} \Rightarrow (A \cap B = \emptyset \text{ și } A \cup B = E).$

3. Fie $A = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 - 12x + 35 = 0\}$,

$$B = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 + 2x - 35 = 0\}, C = \{x \in \mathbf{Q} | (x^2 + 1)(7x - 1) = 0\}.$$

a) Să se determine mulțimile A, B și C .

b) Să se precizeze dacă numerele $1/5, 5, 7, 1/2$ aparțin sau nu acestor mulțimi.

4. Să se determine mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* | x = 2n, n = \overline{1, 9}\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{N}^* | y = 4m + 6n, m = \overline{1, 3}, n = \overline{-1, 0}\}.$$

5. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 4n + 6m, n, m \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Să se scrie trei elemente ale mulțimii A .

b) Stabiliți dacă 26, 28, 33 sunt elemente din A .

6. Să se indice proprietățile caracteristice ale elementelor mulțimilor: $A = \{4, 7, 10\}$, $B = \{3, 6, 12\}$, $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $D = \{1, 8, 27, 64, 125\}$.

7. Câte elemente au mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x = 3n/(n+2), n = \overline{1, 50}\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} | y = (n-1)/(2^{n+1}), n = \overline{1, 10}\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{R} | z = (an+b)/(cn+d), a, b, c, d \in \mathbb{R}, cd > 0, n = \overline{1, p}\}?$$

8. Fie dată mulțimea $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Să se determine submulțimile lui A :

$$A_1 = \{x \in A | P(x): 2x + 1 = x\},$$

$$A_2 = \{y \in A | Q(y): |y| = y\},$$

$$A_3 = \{z \in A | R(x): |z| = -z\}.$$

9. Să se determine mulțimile:

$$a) A = \{x \in \mathbb{Z} | \min(x+1, 4-0.5x) \geq 1\};$$

$$b) B = \{x \in \mathbb{Z} | \max(x-2, 13-2x) \leq 6\};$$

$$c) C = \{x \in \mathbb{N}^* | \min(3x-1, 2x+10) \leq 20\};$$

$$d) D = \{x \in \mathbb{N}^* | \max(20-x, (45-2x)/3) > 13\};$$

$$e) E = \{x \in \mathbb{Z} | \min(2x+7, 16-3x) > 0\};$$

$$f) F = \{x \in \mathbb{Z} | \max(x-1, 1-x) \leq 4\};$$

$$g) G = \{x \in \mathbb{R} | \min(x-1, (13-x)/2) < 3\};$$

$$h) H = \{x \in \mathbb{R} | \max(x+1, 7-x) > 5\};$$

$$i) I = \{x \in \mathbb{Z} | \max(x+1, 4-0.5x) \leq 1\};$$

$$j) J = \{x \in \mathbb{N}^* | \min(20-x, (45-2x)/3) \geq 20\};$$

$$k) K = \{x \in \mathbb{Z} | \min(x+2, 10-x) > -2\};$$

$$l) L = \{x \in \mathbb{Z} | |x-4| < 8\}.$$

10. Să se compare ($\subset$, $\supset$, $=$, $\not\subset$, $\not\supset$) mulțimile A și B , dacă:

$$a) A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2n+1}{n+4}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, B = \{x \in A | x < 2\};$$

- b) $A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \mid x = \frac{3n^2+1}{n^2+n}, n \in \mathbf{N}^* \right\}, B = \{x \in A \mid 2 \leq x < 3\};$
 c) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 5x + 10 = n^2, n \in \mathbf{N}\}, B = \{-6, -3, -2, 1\};$
 d) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 3x - 3 = n^2, n \in \mathbf{N}\}, B = \{-7, -4, 1, 4\};$
 e) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 11x + 20 = n^2, n \in \mathbf{N}\}, B = \{-16, 5\};$
 f) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| + |x-2| > 5\}, B = \{x \in \mathbf{R} \mid (5/(x-4)) > -1\};$
 g) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| + |1-x| \geq 2\}, B = \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 - 4x - 3 \geq 0\};$
 h) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 - 4x - 3 \geq 0\}, B = \{x \in \mathbf{R} \mid (3/(x+1)) < 1\}.$

11. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Folosind simbolurile $\cup, \cap, \setminus, C$ (complementara), exprimați cu ajutorul lui A, B și $\mathbf{N}^*$ mulțimile:

- a) $A_1 = \{5, 6, 7\};$
 b) $A_2 = \{1, 2, 3, 4\};$
 c) $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\};$
 d) $A_4 = \{8, 9, 10, \dots\};$
 e) $A_5 = \{8, 9, 10\};$
 f) $A_6 = \{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, \dots\};$
 g) $A_7 = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}.$

12. Să se determine mulțimea E , în caz că nu este indicată, și părțile sale A, B, C care satisfac concomitent condițiile:

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A \cap B = \{1, 2\}, A \setminus B = \{5\};$
 b) $\overline{A} = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}, \overline{B} = \{2, 6, 18, 20\},$
 $A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\};$
 c) $A \cap B = \{1, 3\}, \overline{A} = \{5, 6, 7, 9, 10\}, A \Delta B = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\};$
 d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \setminus B = \{1, 4\}, A \cap B \not\subseteq \{3, 4, 5\},$
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\};$
 e) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B \cap C = \{4\}, A \setminus B = \{1, 2\},$
 $A \setminus C = \{1, 3\}, 5 \notin A \cup B, E = \{1, 2, 3, 4, 5\};$
 f) $E = \{1, 2, 3, 4\}, 1 \in A, \{2, 4\} \cap B = \emptyset, 3 \in A \cap B \cap C, 4 \in A \cap C,$
 $A \cap B \not\subseteq C, B \cup C \not\subseteq A, A \cup B \cup C = E;$
 g) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cup B = E, A \cap B = \{2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\} \cap B \not\subseteq A,$
 $\{1, 4\} \cap A \not\subseteq B;$
 h) $E = \{1, 2, 3\}, A \cup B \cup C = E, A \cap B \not\subseteq C, A \cap C \not\subseteq B, B \cap C = \{2\},$
 $1 \in B \setminus C;$
 i) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cup B = E, A \cap B = \{1, 2\}, 5 \notin A \setminus B,$
 A are mai multe elemente ca $B;$
 j) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cup B \cup C = E, A \cap B \cap C = \{5\},$

$$A \setminus B = \{1, 3, 6\}, A \setminus C = \{1, 2, 4\};$$

k) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\} \not\subset B$,
 A are mai puține elemente ca B ;

l) $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\overline{B} = \{1, 5, 6, 7\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$,
 $A \cap B = \{8, 9, 10\}$;

m) $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A \cap B = \{d, f, i\}$,
 $A \cup \{c, d, e\} = \{a, c, d, e, f, h, i\}$, $B \cup \{d, h\} = \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$;

n) $E = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A \cap B = \{4, 6, 9\}$,
 $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $B \cup \{4, 8\} = \{2, 3, \dots, 9\}$.

13. Să se determine mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \triangle B, A \cup (B \setminus A), A \setminus (B \setminus A), A \times B, B \times A, (A \cup B) \times A, B \times (A \setminus B)$, dacă:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{8n - 18}{2n - 9}, n \in \mathbb{N} \right\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{9n^2 - 48n + 16}{3n - 8}, n \in \mathbb{N} \right\};$$

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2n + 1}{2n - 3}, n \in \mathbb{N} \right\}$,

$$B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \mid y = \frac{3k + 1}{3k - 2}, k \in \mathbb{N} \right\};$$

c) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{4n}{n + 2}, n \in \mathbb{N} \right\}$,

$$B = \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid y = \frac{6n + 7}{3n + 1}, n \in \mathbb{N} \right\};$$

d) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x + 5}{x + 1} \in \mathbb{N} \right\}$,

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid y = \frac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\};$$

- e) $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \left| \frac{x+1}{3-x} \geq 0 \right. \right\}, B = \left\{ x \in \mathbf{Z} \left| \frac{x^2-6x+6}{x-1} \in \mathbf{Z} \right. \right\};$
- f) $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \left| \frac{3-x}{5+x} \geq 1 \right. \right\}, B = \left\{ x \in \mathbf{N} \left| \frac{3-x}{5+x} \geq 1 \right. \right\};$
- g) $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \left| \frac{x+1}{x-3} \in \mathbf{Z} \right. \right\}, B = \left\{ x \in \mathbf{N} \left| \frac{x+1}{x-3} \in \mathbf{Z} \right. \right\};$
- h) $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \left| \frac{x^2-5x+6}{x+3} \in \mathbf{Z} \right. \right\},$
 $B = \left\{ x \in \mathbf{N} \left| \frac{x^2-5x+6}{x+3} \in \mathbf{Z} \right. \right\};$
- i) $A = \{x \in \mathbf{N}^* | x = 2n, n = \overline{1, 10}\},$
 $B = \{y \in \mathbf{N}^* | y = 4m + 6n, m = \overline{1, 3}, n \in \{-1, 0\}\};$
- j) $A = \{x \in \mathbf{R} | |x-7| + |x+7| = 14\},$
 $B = \{x \in \mathbf{Z} | |x+3| + |x-9| = 14\};$
- k) $A = \{n^2 - 5 | n \in \mathbf{N}\}, B = \{n^2 + 5 | n \in \mathbf{N}\};$
- l) $A = \{n^2 - 50 | n \in \mathbf{N}\}, B = \{n^2 + 50 | n \in \mathbf{N}\};$
- m) $A = \{n^2 - 500 | n \in \mathbf{N}\}, B = \{n^2 + 500 | n \in \mathbf{N}\};$
- n) $A = \{x \in \mathbf{R} | x - \sqrt{x^2-1} = \sqrt{2}\}, B = \{x \in \mathbf{R} | 8x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0\}.$

14. Fie $M = \left\{ x \in \mathbf{Q} \left| x = \frac{7n-4}{n+3}, n \in \mathbf{N}^* \right. \right\}.$

a) Să se determine mulțimile:

$$A = \{x \in M | x \leq 6\}, B = \{x \in M | x < 7\}, C = \{x \in M | x \in \mathbf{Z}\}.$$

b) Câte elemente are mulțimea $D = \{x \in M | x \leq (699/100)\}?$

15. Să se determine mulțimile $A, B \subseteq E$, dacă

$$A \Delta B = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}, A \cap B = \{1, 3\}, \overline{A} = \{5, 6, 7, 9, 10\},$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

16. Să se determine mulțimea E și părțile sale A și B , dacă
 $\overline{A} = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}, \overline{B} = \{2, 6, 18, 20\}, A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}.$

17. Comparați mulțimile A și B , dacă:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} | \sqrt{x^2-25} < x+1\},$

$$B = \left\{ x \in \mathbf{R} \left| \begin{cases} x+1 > 0, \\ x^2-25 < (x+1)^2 \end{cases} \right. \right\};$$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} | \sqrt{x^2-16} \cdot (x^2-80) \leq \sqrt{x^2-16}\},$

$$B = \left\{ x \in \mathbf{R} \left| \begin{cases} x^2-16 \geq 0, \\ x^2-80x \leq 1 \end{cases} \right. \right\};$$

$$c) A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{6+x-x^2} > 2x-1\},$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \begin{cases} 6+x-x^2 \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0, \\ 6+x-x^2 > (2x-1)^2, \end{cases} \right. \right\};$$

$$d) A = \left\{x \in \mathbb{R} \left| 2x-3 - \frac{1}{x-5} < x-4 - \frac{1}{x-5} \right. \right\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | 2x-3 < x-4\};$$

$$e) A = \left\{x \in \mathbb{R} \left| -\frac{5}{2}(x-x^2-1)(x+4) < -\frac{5}{2}(x-x^2-1)(3x+1) \right. \right\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | x+4 < 3x+1\};$$

$$f) A = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \frac{2}{\sqrt{x}+1} < 0 \right. \right\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)^2 < 0 \right. \right\};$$

$$g) A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3} < 1/2\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | 2\sqrt{(x+3)(x-3)} < 1\}.$$

18. Să se determine valorile parametrului real m pentru care mulțimea A are un element, două elemente sau este vidă, dacă:

$$a) A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + mx + 1 = 0\};$$

$$b) A = \{x \in \mathbb{R} | mx^2 - 5x + m = 0\};$$

$$c) A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - mx + 3 = 0\};$$

$$d) A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4m + 3 = 0\};$$

$$e) A = \{x \in \mathbb{R} | (m+1)x^2 - (5m+4)x + 4m + 3 = 0\};$$

$$f) A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - mx + 36 = 0\};$$

$$g) A = \{x \in \mathbb{R} | (2m-1)x^2 + 2(1-m)x + 3m = 0\};$$

$$h) A = \{x \in \mathbb{R} | mx^2 - (m+1)x + m - 1 = 0\}.$$

19. Să se determine numărul de elemente ale mulțimii A :

$$a) A = \{x \in \mathbb{Q} | x = (n^2 + 3)/(n^2 + n), n = \overline{1, 50}\};$$

$$b) A = \left\{x \in \mathbb{Q} \left| x = \frac{z}{(z+6)(z+5)}, z \in \mathbb{Z}, |z| \leq 45 \right. \right\};$$

$$c) A = \{x \in \mathbb{Z} | (x^2 + 1)(5 - x^2) \geq 0\};$$

$$d) A = \{x \in \mathbb{Z} | (x^2 - 3)(x^2 - 33)(x^2 - 103)(x^2 - 203) < 0\};$$

$$e) A = \left\{x \in \mathbb{Z} \left| x = \frac{z+4}{z+1}, z \in \mathbb{Z} \right. \right\};$$

$$f) A = \left\{x \in \mathbb{N} \left| x = \frac{z+4}{z+1}, z \in \mathbb{Z} \right. \right\}.$$

20. Se consideră mulțimile A, B, C . Să se determine $A \cap B \cap C$.

a) $A = \{10x + 3 | x \in \mathbb{N}\}, B = \{12y + 7 | y \in \mathbb{N}\},$

$C = \{15z + 13 | z \in \mathbb{N}\};$

b) $A = \{15n - 700 | n \in \mathbb{N}\}, B = \{270 - 10m | m \in \mathbb{N}\},$

$C = \{48k + 56 | k \in \mathbb{N}\}.$

21. Să se determine $A \cap B$, dacă:

a) $A = \{6n + 7 | n \in \mathbb{N}\}, B = \{114 - 7m | m \in \mathbb{N}\};$

b) $A = \{3p + 28 | p \in \mathbb{N}\}, B = \{107 - 14q | q \in \mathbb{N}\};$

c) $A = \{3n - 2 | n \in \mathbb{N}\}, B = \{1003 - 2m | m \in \mathbb{N}\}.$

22. Să se demonstreze proprietățile operațiilor cu mulțimi (vezi p. 1.1).

23. Să se demonstreze egalitățile (A, B, C etc. mulțimi arbitrare):

a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B;$

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$

d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$

e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B;$

f) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C);$

g) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$

h) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$

i) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C);$

j) $(A \cap B) \Delta A = A \setminus B;$

k) $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i);$

l) $A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus B_i);$

m) $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus B_i).$

24. Fiind date mulțimile $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 5\}$ și $D = \{4, 5, 6\}$, să se scrie elementele următoarelor mulțimi:

a) $(A \times A) \cap (B \times B);$

b) $A^2 \times C^2;$

c) $(A \setminus B) \times (C \setminus D);$

d) $(A \cap B) \times (C \cap D);$

e) $(A \cup B) \times (B \cup D);$

- f) $(A \times B) \setminus (C \times D)$;
 g) $(A \setminus B) \times (C \cap B)$;
 h) $(A \setminus C) \times (B \setminus D)$;
 i) $(A \setminus (C \setminus D)) \times ((D \setminus B) \cup A)$;
 j) $(A \Delta B) \times (D \Delta B)$.

25. Fiind date mulțimile A, B și C , rezolvați ecuațiile $(A \circ B) \Delta X = C$, unde $\circ \in \{\cup, \cap, \setminus, \Delta\}$:

- a) $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{5, 7, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
 b) $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 5, 6, 7\}$.

26. Să se determine mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup (B \setminus \overline{A})$, $A \cap (\overline{A} \setminus B)$, dacă:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)(2+x)(4-x) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 7x + 12 \leq 0\}$;
 b) $A = \{x \in \mathbb{R} | 4x^2 - 12x + 5 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1/2 < x < 5/2\}$;
 c) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq 2x + 7 \leq 3\}$;
 d) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 4)(x + 1) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 > 0\}$;
 e) $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x(x+7) = x^2 + 3x\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \begin{cases} 5x^2 = 6x, \\ 5x + 4 = 0 \end{cases} \right. \right\}$;
 f) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 4x)(x + 1) < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 < 0\}$;
 g) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3x(x-2) - (x+1)(x-13) = 0\}$,
 $B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \begin{cases} x^2 + 7 = 0, \\ 13x^2 - 14x + 9 = 0 \end{cases} \right. \right\}$;
 h) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3(x-9)^2 - 2(x-9) - 16 = 0\}$,
 $B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \begin{cases} x^2 - 14x + 49 = 0, \\ x - \frac{9}{5} \left(x + \frac{4}{3}\right) = \frac{39}{2} \end{cases} \right. \right\}$;
 i) $A = \{x \in \mathbb{R} | 4(2x-3)^2 - 4(2x-3) + 1 = 0\}$,
 $B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \begin{cases} \sqrt{3}x^2 - x + 2 = 0, \\ 3(4x-7)(x^2+1) = 0 \end{cases} \right. \right\}$;
 j) $A = \{x \in \mathbb{R} | |2x-1| < |4x+1|\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | |3x-1| - |2x+3| \geq 0\}$;
 k) $A = \{x \in \mathbb{R} | |4-3x| \geq 2-x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | |2x-3| \geq 2x-3\}$;
 l) $A = \{x \in \mathbb{R} | 6x^2 - 2x + 1 \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2|x| - 3 \leq 0\}$;
 m) $A = \{x \in \mathbb{R} | |x| + |x-1| < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | |x+1| + |x-2| > 5\}$;
 n) $A = \{x \in \mathbb{R} | ||x-3| + 1| \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | ||x-1| + x| < 3\}$.

CAPITOLUL II

Relații, funcții

2.1. Definiții și notații

I. Relații, tipurile lor. Compunerea relațiilor.

Fie A și B două mulțimi nevide, iar $A \times B$ produsul cartezian al lor. O submulțime $R \subseteq A \times B$ se numește **relație** între elementele lui A și elementele lui B . În cazul când $A = B$, o relație $R \subseteq A \times A$ se numește **relație binară** definită pe mulțimea A .

Dacă există o relație $R \subseteq A \times B$, atunci pentru o pereche ordonată $(a, b) \in A \times B$ putem avea $(a, b) \in R$ sau $(a, b) \notin R$. În primul caz scriem aRb și citim "a este în relația R cu b ", iar în al doilea caz — $a \not R b$, care se citește "a nu este în relația R cu b ". Reținem deci că

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R.$$

Prin **domeniul de definiție al relației** $R \subseteq A \times B$ vom înțelege submulțimea $\delta_R \subseteq A$ ce constă din acele și numai acele elemente ale mulțimii A ce se află în relația R cu un element din B , adică

$$\delta_R = \{x \in A | (\exists) y \in B, (x, y) \in R\}.$$

Prin **domeniul de valori al relației** $R \subseteq A \times B$ vom înțelege submulțimea $\rho_R \subseteq B$ ce constă din acele și numai acele elemente ale mulțimii B care se află în relația R cel puțin cu un element din A , adică

$$\rho_R = \{y \in B | (\exists) x \in A, (x, y) \in R\}.$$

Relația inversă. Dacă avem o relație $R \subseteq A \times B$, atunci prin **relație inversă** a relației R vom înțelege relația $R^{-1} \subseteq B \times A$ definită de echivalența

$$(b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R,$$

adică

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in R\}.$$

Exemplul 1. Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ și relațiile
 $\alpha = \{(1, 5), (2, 4), (2, 6)\} \subseteq A \times B$, $\beta = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \subseteq A \times B$
 și $\gamma = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\} \subseteq B \times A$.

Să se determine domeniul de definiție și domeniul de valori ale acestor relații și relațiile inverse respective.

Soluție. a) $\delta_\alpha = \{1, 2\} = A$, $\rho_\alpha = \{4, 5, 6\} = B$; $\alpha^{-1} = \{(5, 1), (4, 2), (6, 2)\}$; $\delta_{\alpha^{-1}} = B$, $\rho_{\alpha^{-1}} = A$;

b) $\delta_\beta = \{2\}$, $\rho_\beta = \{4, 5, 6\} = B$; $\beta^{-1} = \{(4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$; $\delta_{\beta^{-1}} = B$, $\rho_{\beta^{-1}} = \{2\}$;

c) $\delta_\gamma = \{4, 5\}$, $\rho_\gamma = \{1, 2\} = A$; $\gamma^{-1} = \{(1, 4), (2, 4), (1, 5), (2, 5)\}$; $\delta_{\gamma^{-1}} = A$, $\rho_{\gamma^{-1}} = \{(4, 5)\}$.

Compunerea relațiilor. Fie A, B, C trei mulțimi și să considerăm relațiile $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. Relația $R \circ S \subseteq A \times C$ construită în conformitate cu echivalența

$$(a, c) \in R \circ S \Leftrightarrow (\exists) b \in B ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S),$$

adică

$R \circ S = \{(a, c) \in A \times C | (\exists) b \in B ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S)\} \subseteq A \times C$,
 se numește **compunerea relațiilor** R și S .

Exemplul 2. Fie $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ cele din exemplul 1. Să se determine $\alpha \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta$, $\alpha \circ \gamma$, $\beta \circ \gamma$, $\beta^{-1} \circ \alpha$, $\beta^{-1} \circ \beta$, $\gamma \circ \beta^{-1}$, $\gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$ și $(\beta \circ \gamma)^{-1}$.

Soluție. Atragem atenție că compusul relațiilor $\alpha \subseteq C \times D$ cu $\beta \subseteq E \times E$ există, dacă și numai dacă $D = E$.

a) Deoarece $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq A \times B$, rezultă că $\alpha \circ \alpha$ și $\alpha \circ \beta$ nu există.

b) $\alpha \subseteq A \times B$ și $\gamma \subseteq B \times A \Rightarrow \alpha \circ \gamma \in A \times A$. Determinăm $\alpha \circ \gamma$:

$$(1, 5) \in \alpha \text{ și } (5, 1) \in \gamma \Rightarrow (1, 1) \in \alpha \circ \gamma,$$

$$(1, 5) \in \alpha \text{ și } (5, 2) \in \gamma \Rightarrow (1, 2) \in \alpha \circ \gamma,$$

$$(2, 4) \in \alpha \text{ și } \{(4, 1), (4, 2)\} \subseteq \gamma \Rightarrow \{(2, 1), (2, 2)\} \subseteq \alpha \circ \gamma;$$

$$(2, 6) \in \alpha, \text{ însă în } \gamma \text{ nu avem nici o pereche cu prima componentă } 6.$$

Rezultă $\alpha \circ \gamma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

c) $\beta \subseteq A \times B$, $\gamma \subseteq B \times A \Rightarrow \beta \circ \gamma$ există. Repetând raționamentele din p. b), obținem

$$\beta \circ \gamma = \{(2, 1), (2, 2)\}.$$

d) $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ și $\alpha \subseteq A \times B \Rightarrow \beta^{-1} \circ \alpha \subseteq B \times B$ și

$$\beta^{-1} \circ \alpha = \{(4, 4), (4, 6), (5, 4), (5, 6), (6, 4), (6, 6)\}.$$

e) $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ și $\beta \subseteq A \times B \Rightarrow \beta^{-1} \circ \beta \subseteq B \times B$ și

$$\beta^{-1} \circ \beta = \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} = B^2.$$

$$f) \beta \subseteq A \times B \text{ și } \beta^{-1} \subseteq B \times A \Rightarrow \beta \circ \beta^{-1} \subseteq A \times A \text{ și } \beta \circ \beta^{-1} = \{(2, 2)\}.$$

$$g) \gamma^{-1} \subseteq A \times B \text{ și } \beta^{-1} \subseteq B \times A \Rightarrow \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} \subseteq A \times A \text{ și } \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} = \{(1, 2), (2, 2)\}.$$

$$h) (\beta \circ \gamma)^{-1} = \{(1, 2), (2, 2)\} = \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}.$$

Relația de egalitate. Fie A o mulțime. Relația

$$1_A = \{(x, x) | x \in A\} = \Delta \subseteq A \times A$$

se numește **relație de egalitate** pe A . Adică

$$x 1_A y \Leftrightarrow x = y.$$

De un real folos este

Teorema 1. Fie A, B, C, D mulțimi și $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$ relații. Atunci

- 1) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (asociativitatea compunerii relațiilor);
- 2) $1_A \circ R = R \circ 1_B = R$;
- 3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;
- 4) $(R^{-1})^{-1} = R$.

Relații de echivalență. Relația binară $R \subseteq A^2$ se numește:

- a) **reflexivă**, dacă xRx oricare ar fi $x \in A$;
- b) **simetrică**, dacă $(xRy \Rightarrow yRx)$, $(\forall) x, y \in A$;
- c) **tranzitivă**, dacă $((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$, $(\forall) x, y, z \in A$;
- d) **antisimetrică**, dacă $((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$, $(\forall) x, y \in A$;
- e) **relație de echivalență pe A** , dacă ea este reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- f) **antireflexivă**, dacă $x \not R x$ oricare ar fi $x \in A$.

Fie R o relație de echivalență pe mulțimea A . Pentru fiecare element $x \in A$, mulțimea

$$R_x = \{y \in A | xRy\}$$

se numește **clasa de echivalență** a lui x modulo R (sau în raport cu R), iar mulțimea

$$A/R = \{R_x | x \in A\}$$

se numește **mulțime factor** (sau **mulțime cât**) a lui A prin R .

Proprietățile claselor de echivalență. Fie R o relație de echivalență pe o mulțime A și $x, y \in A$. Atunci au loc următoarele afirmații:

- 1) $x \in R_x$;
- 2) $R_x = R_y \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y \in R_x$;

$$3) R_x \neq R_y \Leftrightarrow R_x \cap R_y = \emptyset;$$

$$4) \bigcup_{x \in A} R_x = A.$$

Partiții pe o mulțime. Fie A o mulțime nevidă. O familie de submulțimi $\{A_i | i \in I\}$ ale lui A se numește **partiție pe A** (sau a lui A), dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

$$1) i \in I \Rightarrow A_i \neq \emptyset;$$

$$2) A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset;$$

$$3) \bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

Teorema 2. Pentru orice relație de echivalență R pe mulțimea A , mulțimea factor $A/R = \{R_x | x \in A\}$ este o partiție a lui A .

Teorema 3. Pentru orice partiție $S = \{A_i | i \in I\}$ a lui A , există o unică relație de echivalență α_S pe A , astfel ca

$$A/\alpha_S = \{A_i | i \in I\}.$$

Relația $\alpha_S \subseteq A^2$ se construiește după regula

$$x \alpha_S y \Leftrightarrow (\exists) i \in I \ (x \in A_i \wedge y \in A_i).$$

Se stabilește ușor că α_S este relație de echivalență pe A și egalitatea cerută.

Exemplul 3. Definim pe mulțimea $\mathbf{Z}$ relația binară α în conformitate cu echivalența $a \alpha b \Leftrightarrow (a-b):n$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, n fixat, $(\forall) a, b \in \mathbf{Z}$.

a) Să se demonstreze că α este relație de echivalență pe $\mathbf{Z}$.

b) Să se determine structura claselor de echivalență.

c) Să se construiască mulțimea factor $\mathbf{Z}/\alpha$. Aplicație: $n = 5$.

Soluție. a) Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Atunci:

$$1) \text{ reflexivitatea } a - a = 0:n \Rightarrow a \alpha a;$$

$$2) \text{ simetria } a \alpha b \Rightarrow (a-b):n \Rightarrow -(b-a):n \Rightarrow (b-a):n \Rightarrow b \alpha a;$$

$$3) \text{ tranzitivitatea } (a \alpha b \wedge b \alpha c) \Rightarrow ((a-b):n \wedge (b-c):n) \Rightarrow \\ \Rightarrow ((a-b) + (b-c)):n \Rightarrow (a-c):n \Rightarrow a \alpha c.$$

Din 1) - 3) urmează că α este relație de echivalență pe $\mathbf{Z}$.

b) Fie $a \in \mathbf{Z}$. Atunci

$$\alpha_a = \{b \in \mathbf{Z} | a \alpha b\} = \{b \in \mathbf{Z} | (b-a):n\} = \{b \in \mathbf{Z} | (\exists) t \in \mathbf{Z}: b-a=nt\} = \\ = \{b \in \mathbf{Z} | (\exists) t \in \mathbf{Z}: b = a + nt\} = \{a + nt | t \in \mathbf{Z}\}.$$

În conformitate cu teorema împărțirii cu rest pentru numerele întregi a și n , obținem

$$a = nq + r_a, \quad 0 \leq r_a \leq n-1.$$

Atunci

$$a + nt = nq + r_a + nt = r_a + (nt + nq) = r_a + ns,$$

unde $s = t + q \in \mathbf{Z}$, și de aceea

$$\alpha_a = \{r_a + ns \mid s \in \mathbf{Z}\},$$

unde r_a este restul de la împărțirea lui a prin n . Însă

$$a = nq + r_a \Leftrightarrow a - r_a = nq \Leftrightarrow (a - r_a):n \Leftrightarrow a\alpha r_a \Leftrightarrow \alpha_a = \alpha_{r_a}.$$

Cu alte cuvinte, clasa de echivalență a lui $a \in \mathbf{Z}$ coincide cu clasa restului de la împărțirea lui a prin n .

c) Deoarece prin împărțirea la n se pot obține numai resturile $0, 1, 2, \dots, n-1$, din p. b) rezultă că avem exact n clase de echivalență diferite:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}.$$

De obicei se folosește notația $\alpha_i = \hat{i}$, $i = \overline{0, n-1}$. Atunci

$$\mathbf{Z}/\alpha = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\},$$

unde $\hat{i}$ constă din acele și numai acele numere întregi care la împărțirea prin n dau restul i , $i = \overline{0, n-1}$.

Pentru $n = 5$, obținem

$$\mathbf{Z}/\alpha = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\},$$

cu

$$\hat{0} = \{\pm 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots\} = \{5t \mid t \in \mathbf{Z}\},$$

$$\hat{1} = \{1 + 5q \mid q \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\},$$

$$\hat{2} = \{2 + 5s \mid s \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\},$$

$$\hat{3} = \{3 + 5u \mid u \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\},$$

$$\hat{4} = \{4 + 5v \mid v \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}.$$

Definiție. Relația α se numește **relație de congruență modulo n** pe $\mathbf{Z}$, iar clasa $\hat{a} = \alpha_a$ se numește **clasă de rest modulo n** și elementele ei se numesc **reprezentanții acestei clase**.

Notăția obișnuită:

$a\alpha b \Leftrightarrow (a - b):n \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$ (a este congruent cu b modulo n), iar

$$\mathbf{Z}/\alpha = \mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$$

este mulțimea tuturor claselor de resturi modulo n .

Exemplul 4 (geometric). Fie π un plan și L mulțimea tuturor dreptelor din plan. Definim pe L relația binară β în conformitate cu

$$d_1\beta d_2 \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2, (\forall) d_1, d_2 \in L.$$

a) Să se arate că β este o relație de echivalență pe L .

b) Să se descrie clasele de echivalență modulo β .

c) Să se indice mulțimea factor.

Soluție. a) Este evident că β este relație de echivalență (fiecare dreaptă este paralelă cu ea însăși; dacă $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_2 \parallel d_1$ și

$$(d_1 \parallel d_2 \wedge d_2 \parallel d_3) \Rightarrow d_1 \parallel d_3).$$

b) Fie $d \in L$. Atunci clasa

$$\beta_d = \{l \in L \mid l \alpha d\} = \{l \in L \mid l \parallel d\}$$

constă din acele și numai acele drepte din L care sunt paralele cu dreapta d .

c) $L/\beta = \{\beta_d \mid d \in L\}$ este o mulțime infinită, deoarece în planul π avem o infinitate de direcții.

Exemplul 5. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și părțile ei $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4, 6\}$, $A_3 = \{5, 7, 8\}$, $A_4 = \{9\}$, $B_1 = \{1, 2, 4\}$, $B_2 = \{2, 5, 6\}$, $B_3 = \{3, 7, 8, 9, 10\}$.

a) Să se arate că $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ este partiție a lui A .

b) Să se determine relația de echivalență α_S pe A .

c) Este $T = \{B_1, B_2, B_3\}$ o partiție pe A ?

Soluție. a) 1) Observăm că $A_i \in S \Rightarrow A_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1, 4}$;

2) $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_1 \cap A_4 = A_2 \cap A_3 = A_2 \cap A_4 = A_3 \cap A_4 = \emptyset$.

3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$,

adică sistemul S de submulțimi ale mulțimii A definește o partiție pe A .

b) În conformitate cu teorema 3, avem

$$(x, y) \in \alpha_S \Leftrightarrow x \alpha_S y \Leftrightarrow (\exists) i \in \{1, 2, 3, 4\} (x \in A_i \wedge y \in A_i).$$

Deci

$$\alpha_S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,3), (4,4), (4,6), (6,3), (6,4), (6,6), (5,5), (5,7), (5,8), (8,5), (8,8), (8,7), (7,5), (7,7), (7,8), (9,9)\}.$$

c) 1) $B_i \in T \Rightarrow B_i \neq \emptyset$; $i = \overline{1, 3}$;

2) $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A$;

3) $B_1 \cap B_2 = \{2\} \neq \emptyset$,

ceea ce demonstrează că sistemul T nu definește o partiție pe A .

Relații de ordine. O relație binară R pe mulțimea A se numește **relație de ordine pe A** , dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

Dacă R este o relație de ordine pe A , atunci și R^{-1} este de asemenea o relație de ordine pe A (verificați!). De obicei, se notează relația R cu „ $\leq$ ” și relația R^{-1} cu „ $\geq$ ”, astfel că

$$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x.$$

Cu această notație, condițiile că „ $\leq$ ” este o relație de ordine pe mulțimea A se scriu:

reflexivitatea $x \in A \Rightarrow x \leq x$;

antisimetria $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$;

tranzitivitatea $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Exemplul 6. Pe mulțimea $\mathbb{N}$ definim relația binară γ în conformitate cu

$$a\gamma b \Leftrightarrow (\exists) k \in \mathbb{N} (a = b \cdot k).$$

Să se arate că γ este o relație de ordine pe $\mathbb{N}$.

Soluție. Verificăm condițiile din definiția relației de ordine.

1) Reflexivitatea

$$a = a \cdot 1 \Rightarrow a\gamma a, (\forall) a \in \mathbb{N}.$$

2) Antisimetria. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a\gamma b$ și $b\gamma a$. Rezultă că există numerele naturale $c, d \in \mathbb{N}$ cu $a = b \cdot c$ și $b = a \cdot d$. Atunci

$$a = b \cdot c = (a \cdot d) \cdot c = a \cdot (d \cdot c) \Rightarrow d \cdot c = 1 \Rightarrow d = c = 1,$$

ceea ce implică

$$a = b \cdot c = b \cdot 1 = b.$$

3) Tranzitivitatea. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a\gamma b$ și $b\gamma c$. Atunci există $u, v \in \mathbb{N}$ cu $a = bu$ și $b = cv$ și de aceea

$$a = bu = (cv)u = c(vu) \Rightarrow a\gamma c.$$

Deoarece $v \cdot u \in \mathbb{N}$, este adevărată implicația

$$(a\gamma b \wedge b\gamma c) \Rightarrow a\gamma c,$$

ceea ce demonstrează că γ este o relație de ordine pe mulțimea $\mathbb{N}$.

Remarcă. Relația de ordine γ se numește relație de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ și se notează $a:b$, adică

$$a\gamma b \Rightarrow a:b \Leftrightarrow (\exists) k \in \mathbb{N} (a = b \cdot k) \Leftrightarrow b|a$$

($b|a$ se citește „ b divide pe a ”, iar $a:b$ „ a este divizibil prin b ”).

II. Relații funcționale. Fie A și B două mulțimi. O relație $R \subseteq A \times B$ se numește **aplicație** sau **relație funcțională**, dacă sunt satisfăcute condițiile:

1) $(\forall) x \in A (\exists) y \in B$, astfel încât xRy ;

2) $(xRy \wedge xRy_1) \Rightarrow y = y_1$.

O **aplicație** (sau **funcție**) este un triplet $f = (A, B, R)$, unde A și B sunt două mulțimi și $R \subseteq A \times B$ este o relație funcțională.

Dacă $R \subseteq A \times B$ este o aplicație, atunci pentru fiecare element $x \in A$ există, conform condițiilor 1) și 2) de mai sus, un singur element $y \in B$, astfel că xRy ; notăm acest element y cu $f(x)$. Deci

$$f(x) = y \Leftrightarrow xRy.$$

Elementul $f(x) \in B$ se numește **imaginea** elementului $x \in A$ prin aplicația f , mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al lui f notat prin $D(f) = A$, iar mulțimea B se numește **codomeniul** lui f și spunem, de obicei, că f este o aplicație definită pe A cu valori în B . Relația funcțională R se numește și **graficul** aplicației (funcției) f , notat, ulterior, prin G_f . Pentru a arăta că f este o aplicație definită pe A cu valori în B , scriem $f: A \longrightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$, iar în loc de a descrie care este graficul lui R (al lui f), indicăm pentru fiecare $x \in A$ imaginea sa $f(x)$. Atunci

$$y = f(x) \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow xRf(x) \Leftrightarrow (x, f(x)) \in R = G_f,$$

adică

$$G_f = \{x, f(x) | x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Egalitatea aplicațiilor. Două aplicații $f = (A, B, R)$ și $g = (C, D, S)$ se numesc **egale** dacă și numai dacă au același domeniu $A = C$, același codomeniu $B = D$ și același grafic $R = S$. În cazul când $f, g: A \longrightarrow B$, egalitatea $f = g$ este echivalentă cu $f(x) = g(x), (\forall) x \in A$, adică

$$f = g \Leftrightarrow (\forall) x \in A (f(x) = g(x)).$$

Aplicația identică. Fie A o mulțime. Tripletul $(A, A, 1_A)$ este, evident, o aplicație, care se notează cu același simbol 1_A (sau ε) și se numește **aplicație identică** a mulțimii A .

Avem

$$1_A(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in 1_A \Leftrightarrow x = y.$$

Prin urmare,

$$1_A: A \longrightarrow A \text{ și } 1_A(x) = x \text{ pentru } (\forall) x \in A.$$

Prin $F(A, B)$ vom nota mulțimea funcțiilor definite pe A cu valori în B . Pentru $B = A$, vom folosi înscrisura $F(A)$ în loc de $F(A, A)$.

În cazul unei mulțimi finite $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, o funcție $\varphi: A \longrightarrow A$ se dă uneori cu ajutorul unui tablou de forma

x	a_1	a_2	$\dots$	a_n
$\varphi(x)$	$\varphi(a_1)$	$\varphi(a_2)$	$\dots$	$\varphi(a_n)$

în care în prima linie se trec elementele $a_1, a_2, \dots, a_n$ ale mulțimii A , iar în a doua linie se trec imaginile respective ale acestora prin φ , anume $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)$.

În cazul când $A = \{1, 2, \dots, n\}$, vom folosi pentru a determina aplicația $\varphi: A \longrightarrow A$ și notația

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \dots & \varphi(n-1) & \varphi(n) \end{pmatrix},$$

mai frecvent folosită pentru înscrierea aplicațiilor bijective ale mulțimii A în ea însăși. De exemplu, dacă $A = \{1, 2\}$, atunci elementele lui $F(A)$ sunt:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $f: A \longrightarrow B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, atunci introducem notațiile:

$$f(X) = \{b \in B | (\exists) x \in X: f(x) = b\} = \{f(x) | x \in X\} \subseteq B$$

– **imagea** submulțimii X prin aplicația f .

În caz particular, $\varphi(A) = \mathcal{I}m\varphi$, **imagea aplicației** φ ;

$f^{-1}(Y) = \{a \in A | (\exists) y \in Y: f(a) = y\} = \{a \in A | f(a) \in Y\} \subseteq A$
este **preimagea** submulțimii Y prin aplicația f .

În caz particular, pentru $y \in B$, vom scrie în loc de $f^{-1}(\{y\})$ simplu $f^{-1}(y)$, adică

$$f^{-1}(y) = \{a \in A | f(a) = y\}$$

– mulțimea tuturor preimaginilor lui y prin aplicația f , iar

$$f^{-1}(B) = \{a \in A | \varphi(a) \in B\}$$

– **preimagea completă** a mulțimii B prin aplicația f .

Compunerea aplicațiilor. Considerăm aplicațiile $f = (A, B, R)$ și $g = (B, C, S)$, deci codomeniul lui f să coincidă cu domeniul lui g . Formăm tripletul $g \circ f = (A, C, R \circ S)$.

Atunci $g \circ f$ este de asemenea o aplicație, numită compusul aplicației g cu aplicația f , iar operația “ $\circ$ ” se numește **compunerea aplicațiilor**. Avem

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = z &\Leftrightarrow (x, z) \in R \circ S \Leftrightarrow (\exists) y \in B ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists) y \in B: xRy \wedge ySz \Leftrightarrow (\exists) y \in B: (f(x) = y \wedge g(y) = z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) = z, \end{aligned}$$

adică

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad (\forall) x \in A.$$

Teorema 4. Fie date aplicațiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Atunci
a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (asociativitatea compunerii aplicațiilor);
b) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Exemplul 7. Considerăm relațiile $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și $S \subseteq [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definite astfel: $xRy \Leftrightarrow x^2 = y$,
 $xSy \Leftrightarrow x = y^2$, $xTy \Leftrightarrow y = x + 1$.

A. Să se determine care din relațiile $R, R^{-1}, S, S^{-1}, T, T^{-1}$ sunt relații funcționale.

B. Să se găsească funcțiile determinate în p. A.

C. Să se calculeze $f \circ g, g \circ f, f \circ h, h \circ f, h \circ h^{-1}, h^{-1} \circ h$ (f, g, h funcțiile din p. B.)

D. Să se calculeze $(f \circ h)(-3), (h^{-1} \circ h)(1/2), (h \circ f)(1/3)$.

Soluție. Rezolvăm A și B concomitent.

a) Examinăm relația R .

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$

1) $(\forall) x \in \mathbb{R} (\exists) y = x^2 \in \mathbb{R}$, astfel încât xRy ;

2) $(xRy \wedge xRy_1) \Rightarrow (y = x^2 \wedge y_1 = x^2) \Rightarrow y = y_1$, adică R este relație funcțională. Notăm aplicația determinată de R prin f , $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, R)$.

b) Examinăm relația R^{-1} .

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y = x^2,$$

adică dacă $y \in \mathbb{R} = \{a \in \mathbb{R} | a < 0\}$, atunci nu există nici un $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $yR^{-1}x$, ceea ce demonstrează că R^{-1} nu este relație funcțională.

c) Pentru relația S , avem: S și S^{-1} sunt relații funcționale. Notăm prin $g = ([0, +\infty), [0, +\infty), S)$ și $g^{-1} = ([0, +\infty), [0, +\infty), S^{-1})$ funcțiile (aplicațiile) definite de S și S^{-1} , respectiv.

d) Examinăm relația T :

1) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{R}$ și deci

$$(\forall)x \in \mathbb{R} (\exists) y = x + 1 \in \mathbb{R}, \text{ astfel că } xTy;$$

2) $(xTy \wedge xTy_1) \Rightarrow (y = x + 1 \wedge y_1 = x + 1) \Rightarrow y = y_1$, ce demonstrează că T este relație funcțională.

e) Pentru relația T^{-1} , obținem:

$$yT^{-1}x \Leftrightarrow xTy \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1.$$

1) $(\forall) y \in \mathbb{R} (\exists) x = y - 1 \in \mathbb{R}$, astfel încât $yT^{-1}x$;

2) $(yT^{-1}x \wedge yT^{-1}x_1) \Rightarrow (xTy \wedge x_1Ty) \Rightarrow (y = x + 1 \wedge y = x_1 + 1) \Rightarrow x_1 + 1 = x + 1 \Rightarrow x_1 = x$, adică T^{-1} este de asemenea relație funcțională. Notăm prin $h = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T)$ și $h^{-1} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T^{-1})$.

C. Din A și B rezultă

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty), h(x) = x + 1,$$

$$x \in \mathbb{R}, h^{-1}(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

a) Atunci $f \circ g, g \circ f$ și $g \circ h$ nu există, fiindcă domeniile și codomeniile nu coincid ($f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, R)$, $g = ([0, +\infty), [0, +\infty), S)$, $h = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T)$).

b) Calculăm $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ h^{-1}$ și $h^{-1} \circ h$.

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x+1) = (x+1)^2;$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = x^2 + 1;$$

$$(h \circ h^{-1})(x) = h(h^{-1}(x)) = h(x-1) = (x-1) + 1 = x = 1_{\mathbb{R}}(x);$$

$$(h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(x+1) = (x+1) - 1 = x = 1_{\mathbb{R}}(x).$$

Deci $f \circ h \neq h \circ f$ și $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{R}}$.

D. Calculăm: $(f \circ h)(-3) = (x+1)^2 /_{x=-3} = 4$, $(h^{-1} \circ h)(1/3) = 1/2$, $(h \circ f)(1/3) = (x^2 + 1) /_{x=1/3} = 1/9 + 1 = 10/9$.

Aplicații injective, surjective și bijective. O aplicație $f: A \rightarrow B$ se numește:

1) **injectivă**, dacă $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, $(\forall) a_1, a_2 \in A$
(echivalent: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$);

2) **surjectivă**, dacă $(\forall) b \in B (\exists) a \in A: f(a) = b$
(orice element din B are cel puțin o preimagine în A);

3) **bijectivă**, dacă f este injectivă și surjectivă.

Remarcă. Pentru a demonstra că o funcție $f: A \rightarrow B$ este surjectivă, trebuie ca ecuația $f(x) = b$ să fie rezolvabilă în A pentru orice $b \in B$.

De un real folos sunt

Teorema 5. Fiind date aplicațiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, avem:

- dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;
- dacă f și g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă;
- dacă f și g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă;
- dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;
- dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

Teorema 6. Aplicația $f: A \rightarrow B$ cu graficul $G_f = R$ este aplicație bijectivă, dacă și numai dacă relația inversă R^{-1} este o relație funcțională (f^{-1} este aplicație).

Această teoremă rezultă imediat din

$$(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y = f(x).$$

Aplicația inversă. Fie $f: A \rightarrow B$ o aplicație bijectivă cu graficul $G_f = R$. Din teorema 6 rezultă că tripletul $f^{-1} = (B, A, R^{-1})$ este o aplicație (funcție). Această funcție se numește **inversa** funcției f .
Avem

$$f^{-1}: B \rightarrow A, \text{ iar pentru } y \in B, \\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow f(x) = y,$$

- adică

$$(y, x) \in R^{-1} = G_{f^{-1}} \Leftrightarrow (x, y) \in R = G_f.$$

Teorema 7. *Aplicația $f: A \rightarrow B$ este bijectivă, dacă și numai dacă există o aplicație $g: B \rightarrow A$ cu $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. În acest caz, avem $g = f^{-1}$.*

III. Funcții reale. Funcția $f: A \rightarrow B$ se numește **funcție de variabilă reală**, dacă $A = D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Funcția de variabilă reală $f: A \rightarrow B$ se numește **funcție reală**, dacă $B \subseteq \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, funcția $f: A \rightarrow B$ se numește **funcție reală**, dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ și $B \subseteq \mathbb{R}$. Graficul funcției reale $f: A \rightarrow B$ este submulțimea G_f a lui $\mathbb{R}^2$, formată din toate perechile $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \in A$ și $y = f(x)$, adică

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Dacă funcția f este inversabilă, atunci

$$(y, x) \in G_{f^{-1}} \Leftrightarrow (x, y) \in G_f.$$

Tradițional, în loc de $f^{-1}(y) = x$ se scrie $y = f^{-1}(x)$. Atunci graficul funcției inverse f^{-1} este simetric cu graficul funcției f în raport cu bisectoarea $y = x$.

Exemplul 8. Pentru funcția

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), y = f(x) = x^2,$$

funcția inversă este

$$f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Graficul funcției f este ramura parabolei $y = x^2$ cuprinsă în cadranul I, iar graficul funcției f^{-1} este ramura parabolei $x = y^2$ cuprinsă în cadranul I (fig. 2.1).

Operații algebrice cu funcții reale. Fie $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții reale definite pe aceeași mulțime D . Considerăm funcțiile:

$$s = f + g: D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definită prin } s(x) = f(x) + g(x), (\forall) x \in D;$$

$$s = f + g - \text{funcția-sumă.}$$

$$p = f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definită prin } p(x) = f(x) \cdot g(x), (\forall) x \in D;$$

$$p = f \cdot g - \text{funcția-produs.}$$

$$d = f - g: D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definită prin } d(x) = f(x) - g(x), (\forall) x \in D;$$

$$d = f - g - \text{funcția-diferență.}$$

$$q = \frac{f}{g}: D_1 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definită prin } q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, (\forall) x \in D_1,$$

unde $D_1 = \{x \in D | g(x) \neq 0\}$;

$$q = \frac{f}{g} - \text{funcția cât.}$$

$|f|: D \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) < 0, \end{cases}$
 pentru $(\forall)x \in D$;

$|f|$ – funcția modul.

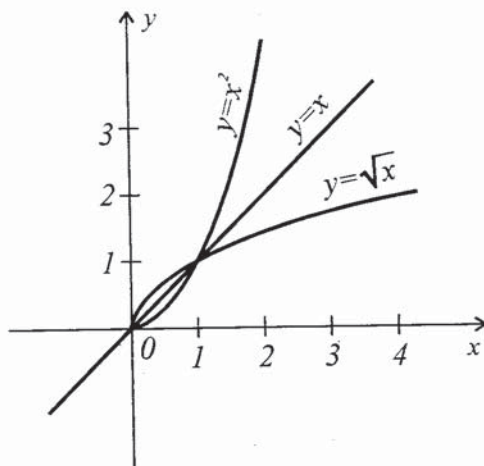


Fig. 2.1

Exemplul 9. Fie $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x) = x^2$ și $g(x) = \sqrt{x}$.
 Să se determine $f \pm g$, $f \cdot g$ și f/g .

Soluție. Deoarece funcțiile f, g au același domeniu de definiție, funcțiile $f \pm g$, $f \cdot g$ și f/g au sens și

$$s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}, \quad (\forall) x \in [0, +\infty);$$

$$d(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x}, \quad (\forall) x \in [0, +\infty);$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}, \quad (\forall) x \in [0, +\infty);$$

$$q(x) = f(x)/g(x) = x^2/\sqrt{x} = x\sqrt{x}, \quad (\forall) x \in D_1 = (0, +\infty).$$

Exemplul 10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ și
 $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Să se determine a) $g \circ f$ și b) $f \circ g$.

Soluție. a) $g \circ f = \varphi$ are sens și obținem funcția $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu
 $\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

b) De asemenea are sens $\psi = f \circ g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, cu
 $\psi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, $(\forall) x \in [0, \infty)$.

2.2. Exerciții rezolvate

1. Fie $A = \{2, 4, 6, 8\}$ și $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $\alpha \subseteq A \times B$, $\alpha = \{(x, y) | x \geq 6 \text{ sau } y \leq 1\}$:

a) care este graficul relației α ?

b) să se alcătuiască schema relației α .

Soluție. a) Deoarece $x \in A$, iar $y \in B$, rezultă că

$$x \geq 6 \Leftrightarrow x \in \{6, 8\}, y \leq 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Deci

$$\alpha = \{(6, 1), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7), (2, 1), (4, 1)\}.$$

b) (Vezi fig. 2.2).

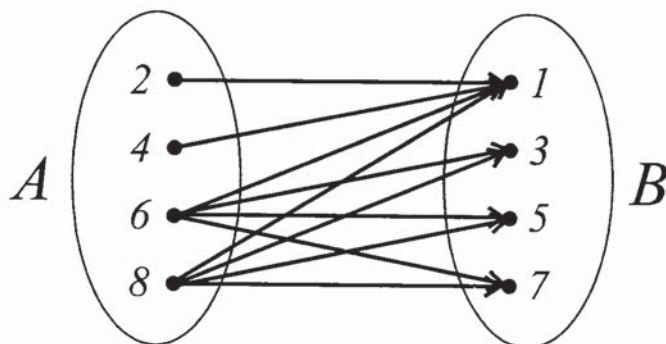


Fig. 2.2

2. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Să se scrie graficul relației $\alpha = \{(x, y) | 3x + 4y = 10\} \subseteq A \times B$.

Soluție. Observăm că $3x + 4y = 10 \Leftrightarrow 3x = 2(5 - 2y) \Rightarrow x$ este par și $(5 - 2y):3$. Ținând cont de faptul că $x \in A$ și $y \in B$, obținem: $x \in \{2, 4\}$, $y \in \{1, 7\}$. Egalitatea $3x + 4y = 10$ este satisfăcută numai de $x = 2$ și $y = 1$. Deci $G_\alpha = \{(2, 1)\}$.

3. Fie $A = \{1, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 2, 5, 6\}$. Să se scrie relația α cu ajutorul literelor $x \in A$ și $y \in B$, dacă se cunoaște graficul relației α .

$$G_\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (3, 6), (5, 5)\}.$$

Soluție. $(x, y) \in G_\alpha \Leftrightarrow y:x$.

4. Considerăm pe mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ relațiile $\alpha, \beta, \gamma, \omega \subseteq \mathbb{N}^2$, definite în felul următor ($x, y \in \mathbb{N}$): $\alpha = \{(3, 5), (5, 3), (3, 3), (5, 5)\}$; $x\beta y \Leftrightarrow x \leq y$; $x\gamma y \Leftrightarrow y - x = 12$; $x\omega y \Leftrightarrow x = 3y$.

- a) Să se determine $\delta_\alpha, \rho_\alpha, \delta_\beta, \rho_\beta, \delta_\gamma, \rho_\gamma, \delta_\omega, \rho_\omega$.
 b) Ce proprietăți posedă fiecare din relațiile $\alpha, \beta, \gamma, \omega$?
 c) Să se determine relațiile $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$ și ω^{-1} .
 d) Să se determine relațiile $\beta \circ \gamma, \gamma \circ \beta, \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}, (\beta \circ \gamma)^{-1}, \gamma \circ \omega$ și $\omega^{-1} \circ \omega$.

Soluție. a) 1) $\delta_\alpha = \{3, 5\} = \rho_\alpha$.

2) $\delta_\beta = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : x\beta y\} = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : x \leq y\} = \mathbb{N}$
 (pentru orice număr natural există numere naturale ce-l întrec).

$\rho_\beta = \{y \in \mathbb{N} | (\exists) x \in \mathbb{N} : x\beta y\} = \{y \in \mathbb{N} | (\exists) x \in \mathbb{N} : x \leq y\} = \mathbb{N}$
 (pentru orice număr natural există cel puțin un număr natural ce nu-l întrece).

3) $\delta_\gamma = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : x\gamma y\} = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : y - x = 12\} =$
 $= \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : x = y - 12\} = \mathbb{N}$
 (de exemplu, $0 = 12 - 12, 1 = 13 - 12$ etc.).

$\rho_\gamma = \{y \in \mathbb{N} | (\exists) x \in \mathbb{N} : y = x + 12\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots, 11\}$
 (de exemplu, ecuația $2 = x + 12$ nu are soluții în $\mathbb{N}$).

4) $\delta_\omega = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : x\omega y\} = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : x =$
 $= 3y\} = \{x \in \mathbb{N} | x : 3\} = \{0, 3, 6, 9, \dots\} = \{3k | k \in \mathbb{N}\}.$

$\rho_\omega = \{y \in \mathbb{N} | (\exists) x \in \mathbb{N} : x = 3y\} = \{y \in \mathbb{N} | (\exists) x \in \mathbb{N} : y = x : 3\} = \mathbb{N}$
 (pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n = 3n/3$).

b) 1) α este simetrică, tranzitivă, dar nu este reflexivă. De exemplu, $(2, 2) \notin \alpha$; deoarece $(3, 3) \in \alpha$, rezultă că α nu este nici antireflexivă.

2) β este reflexivă ($x \leq x, (\forall) x \in \mathbb{N}$), antisimetrică ($(x\beta y \wedge y\beta x) \Rightarrow (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$), tranzitivă ($(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$). Deci β este o relație de ordine pe mulțimea $\mathbb{N}$.

3) γ este antireflexivă ($x - x \neq 12, (\forall) x \in \mathbb{N}$), antisimetrică ($(x\gamma y \wedge y\gamma x) \Rightarrow (y - x = 12 \text{ și } x - y = 12) \Rightarrow x - y = y - x \Rightarrow x = y$), dar nu este simetrică ($x\gamma y \Rightarrow y - x = 12 \Rightarrow x - y = -12 \Rightarrow x \not\gamma y$), nu este tranzitivă ($(x\gamma y \wedge y\gamma z) \Rightarrow (y - x = 12 \wedge z - y = 12) \Rightarrow z - x = 24 \Rightarrow x \not\gamma z$).

4) ω nu este antireflexivă ($x \neq 3x, (\forall) x \in \mathbb{N}^*, 0 = 3 \cdot 0$), este antisimetrică ($(x\omega y \wedge y\omega x) \Rightarrow (x = 3y \wedge y = 3x) \Rightarrow x = 9x \Rightarrow x = 0 = y$, iar pentru $x \neq 0 \neq y$, egalitățile $x = 3y$ și $y = 3x$ nu pot avea loc), nu este reflexivă (de exemplu, $1 \neq 3 \cdot 1 \Rightarrow 1 \not\omega 1$), nu este tranzitivă ($(x\omega y \wedge y\omega z) \Rightarrow (x = 3y \wedge y = 3z) \Rightarrow x = 9z \neq 3z$, în general $\Rightarrow x \not\omega z$).

$$c) 1) \alpha^{-1} = \{(5, 3), (3, 5), (3, 3), (5, 5)\} = \alpha.$$

$$2) \beta^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 | (x, y) \in \beta\} = \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 | x\beta y\} = \\ = \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 | x \leq y\} = \{(y, x) \in \mathbb{N} | y \geq x\}.$$

Deci

$$y\beta^{-1}x \Leftrightarrow y \geq x. \quad (1)$$

$$3) (y, x) \in \gamma^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \gamma \Leftrightarrow x\gamma y \Leftrightarrow y - x = 12 \Leftrightarrow x = y - 12, \\ \text{adică}$$

$$y\gamma^{-1}x \Leftrightarrow x = y - 12. \quad (2)$$

$$4) (y, x) \in \omega^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \omega \Leftrightarrow x = 3y \Leftrightarrow y = x/3, \\ \text{adică}$$

$$y\omega^{-1}x \Leftrightarrow y = x/3. \quad (3)$$

$$d) 1) (x, y) \in \beta \circ \gamma \Leftrightarrow (\exists) z \in \mathbb{N}: (x, z) \in \beta \wedge (z, y) \in \gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists) z \in \mathbb{N}: x \leq z \wedge y - z = 12 \Leftrightarrow (\exists) z \in \mathbb{N}: x \leq z \wedge z = \\ = y - 12 \Leftrightarrow x \leq y - 12 \Leftrightarrow x + 12 \leq y, \\ \text{adică}$$

$$\beta \circ \gamma = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + 12 \leq y\}. \quad (4)$$

$$2) (x, y) \in \gamma \circ \beta \Leftrightarrow (\exists) z \in \mathbb{N}: (x, z) \in \gamma \wedge (z, y) \in \beta \Leftrightarrow (\exists) z \in \\ \in \mathbb{N}: z - x = 12 \wedge z \leq y \Leftrightarrow (\exists) z \in \mathbb{N}: z = x + 12 \wedge z \leq y \Leftrightarrow x + 12 \leq y. \\ \text{ceea ce implică}$$

$$\gamma \circ \beta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + 12 \leq y\}.$$

$$3) (u, v) \in \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} \Leftrightarrow (\exists) w \in \mathbb{N}: (u, v) \in \gamma^{-1} \wedge (w, v) \in \beta^{-1} \Leftrightarrow \\ \stackrel{(1), (2)}{\Leftrightarrow} (\exists) w \in \mathbb{N}: w = u - 12 \wedge w \geq v \Leftrightarrow u - 12 \geq v \Leftrightarrow u \geq v + 12, \\ \text{adică}$$

$$\gamma^{-1} \circ \beta^{-1} = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 | u \geq v + 12\}. \quad (5)$$

$$4) (s, t) \in (\beta \circ \gamma)^{-1} \Leftrightarrow (t, s) \in \beta \circ \gamma \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} t + 12 \leq s \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} (s, t) \in \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}. \\ \text{Cu alte cuvinte,}$$

$$(\beta \circ \gamma)^{-1} = \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}.$$

$$5) (x, y) \in \gamma \circ \omega \Leftrightarrow (\exists) z \in \mathbb{N}: (x, z) \in \gamma \wedge (z, y) \in \omega \Leftrightarrow (\exists) z \in \\ \in \mathbb{N}: z - x = 12 \wedge z = 3y \Leftrightarrow (\exists) z \in \mathbb{N}: z = x + 12 \wedge z = 3y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x + 12 = 3y, \text{ ceea ce implică}$$

$$\gamma \circ \omega = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + 12 = 3y\}.$$

$$6) (u, v) \in \omega^{-1} \circ \omega \Leftrightarrow (\exists) w \in \mathbb{N}: (u, w) \in \omega^{-1} \wedge (w, v) \in \omega \Leftrightarrow \\ \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (\exists) w \in \mathbb{N}: u = w/3 \wedge w = 3v \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (u, v) \in 1_{\mathbb{N}},$$

ceea ce implică

$$\omega^{-1} \circ \omega = 1_N.$$

5. Considerăm relația binară definită pe $\mathbb{R}$ în felul următor

$$x\alpha y \Leftrightarrow (x = y \vee x + y = 2).$$

a) Să se demonstreze că α este relație de echivalență.

b) Să se determine mulțimea factor $\mathbb{R}/\alpha$.

Soluție. a) 1) Deoarece $x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, avem $x\alpha x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

$$2) a\alpha b \Rightarrow (a = b \vee a + b = 2) \Rightarrow (b = a \vee b + a = 2) \Rightarrow b\alpha a.$$

3) Fie $a\alpha b$ și $b\alpha c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned}(a\alpha b \wedge b\alpha c) &\Rightarrow ((a = b \vee a + b = 2) \wedge (b = c \vee b + c = 2)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow ((a = b \wedge b = c) \vee (a = b \wedge b + c = 2) \vee (a + b = 2 \wedge b = c) \vee (a + b = \\ &= 2 \wedge b + c = 2)) \Rightarrow (a = c \vee a + c = 2) \Rightarrow a\alpha c.\end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, relația binară α este reflexivă, simetrică și tranzitivă, ceea ce demonstrează că α este relație de echivalență pe $\mathbb{R}$.

b) Fie $a \in \mathbb{R}$. Determinăm clasa α_a de echivalență a lui a în raport cu α .

$$\begin{aligned}\alpha_a &= \{x \in \mathbb{R} | x\alpha a\} = \{x \in \mathbb{R} | x = a \vee x + a = 2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} | x = a \vee x = 2 - a\} = \{a, 2 - a\}.\end{aligned}$$

Atunci mulțimea factor este

$$\mathbb{R}/\alpha = \{\alpha_x | x \in \mathbb{R}\} = \{\{x, 2 - x\} | x \in \mathbb{R}\}.$$

Observăm că

$$|\alpha_a| = 1 \Leftrightarrow a = 1; |\alpha_a| = 2 \Leftrightarrow a \neq 1; (a \neq b \Rightarrow (\alpha_a = \alpha_b \Leftrightarrow a + b = 2)).$$

Cu alte cuvinte, pentru $a \neq 1$, avem $a \neq 2 - a$ și de aceea $\alpha_a = \alpha_{2-a}$, iar mulțimea factor mai poate fi scrisă

$$\mathbb{R}/\alpha = \{\alpha_a | a \in \mathbb{R}, a \geq 1\} = \{\{a, 2 - a\} | a \geq 1\}.$$

6. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{a, b, c, d, e\}$. Care din diagramele din fig. 2.3 reprezintă o funcție definită pe A cu valori în B și care nu?

Soluție. Prin diagramele a), c), e) sunt date funcțiile definite pe A cu valori în B . Diagrama b) nu reprezintă o funcție definită pe A cu valori în B , deoarece nu este indicată imaginea lui 2. Diagrama d) de asemenea nu definește o funcție pe A cu valori în B , deoarece lui 1 îi corespund două elemente din B , anume a, d .

7. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b\}$. Să se scrie toate funcțiile definite pe A cu valori în B , indicându-se diagrama respectivă.

Soluție. Există opt funcții definite pe A cu valori în B . Diagramele lor sunt reprezentate în fig. 2.4.

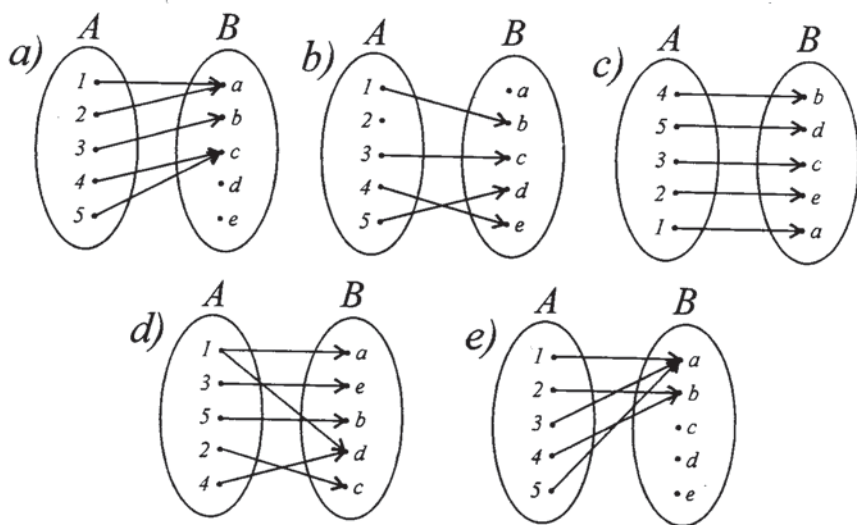


Fig. 2.3

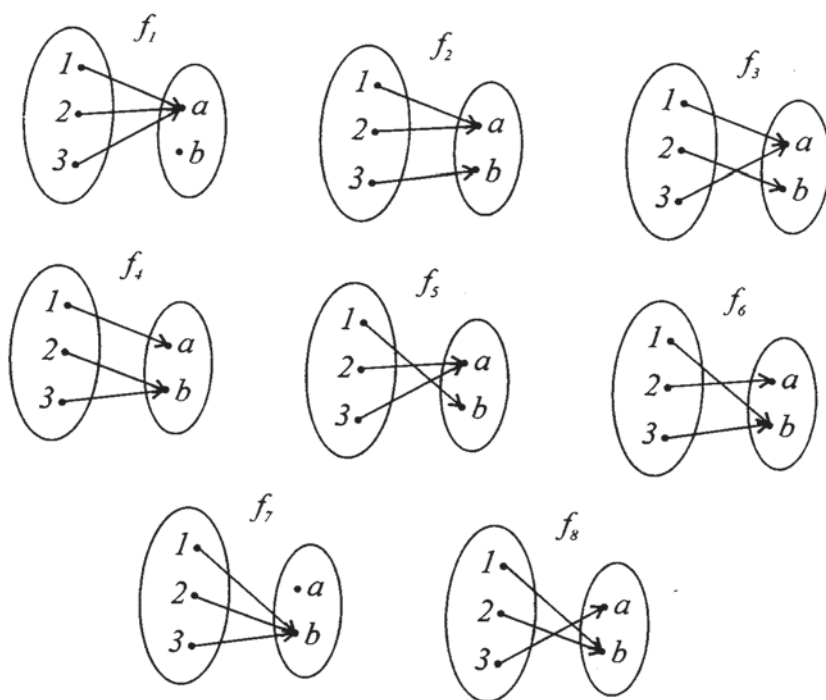


Fig. 2.4

8. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z, t\}$ și $D = \{1, 2\}$.

a) Să se facă diagramele respective pentru două funcții surjective definite pe A cu valori în B .

b) Să se facă diagrama funcțiilor injective definite pe D cu valori în B .

c) Să se facă diagrama unei funcții definite pe B cu valori în C , care nu este injectivă.

d) Să se facă diagramele respective a două funcții bijective definite pe A cu valori în C .

Soluție. a) Diagramele a două funcții surjective și două funcții nesurjective definite pe A cu valori în B sunt reprezentate în fig. 2.5 a) și b).

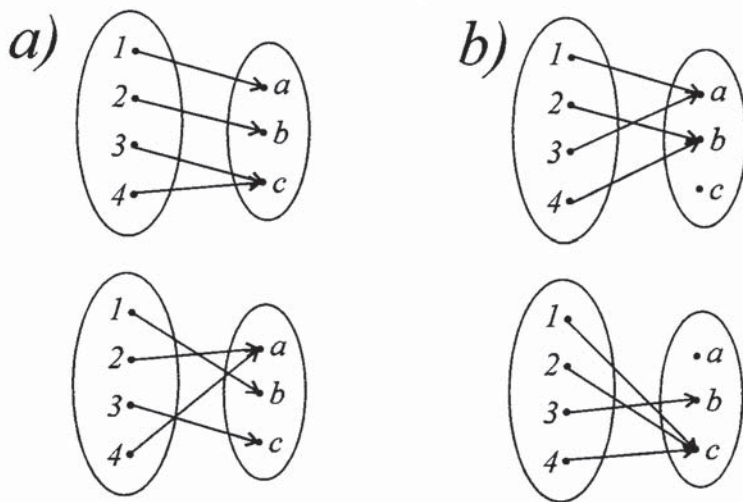


Fig. 2.5

b) Diagrama funcțiilor injective definite pe D cu valori în B sunt reprezentate în fig. 2.6.

c) Diagrama unei funcții neinjective definite pe B cu valori în C este reprezentată în fig. 2.7.

d) Diagramele a două funcții bijective definite pe A cu valori în C sunt reprezentate în fig. 2.8.

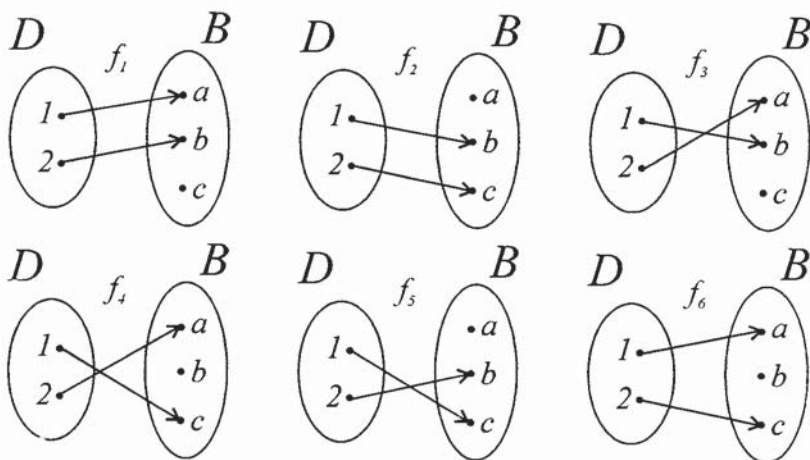


Fig. 2.6

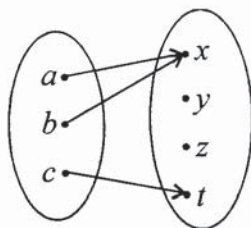


Fig. 2.7

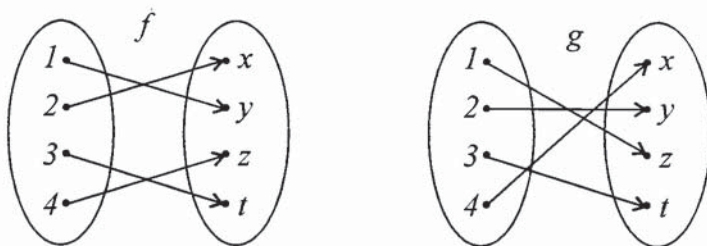


Fig. 2.8

9. Fie $A = \{0, 1, 5, 6\}$, $B = \{0, 3, 8, 15\}$ și funcția $f: A \rightarrow B$, definită de egalitatea $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $(\forall) x \in A$.

a) Este funcția f surjectivă?

b) Este f injectivă?

c) Este f bijectivă?

Soluție. a) Calculăm $f(A) = \{f(0), f(1), f(5), f(6)\} = \{3, 0, 8, 15\} = B$. Deci f este surjectivă.

b) Funcția f este și injectivă, fiindcă $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(5) = 8$ și $f(6) = 15$, adică $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

c) Funcția f este bijectivă.

10. Utilizându-se graficul funcției $f: A \rightarrow B$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, să se arate că funcția f este injectivă, surjectivă sau bijectivă.

$$a) f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2), \\ 3x - 6, & \text{dacă } x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

$$b) f: [1; 5] \rightarrow [-1; 3], f(x) = |x^2 - 6x + 8|.$$

$$c) f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{dacă } -1 < x \leq 0, \\ -x, & \text{dacă } 0 < x \leq 1, \\ -0.5(x + 1), & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

$$d) f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), f(x) = \max(x + 1, 1 - x).$$

Soluție. Dacă oricare paralelă la axa absciselor taie graficul funcției în cel mult un punct (adică îl taie într-un singur punct sau nu-l taie deloc), atunci funcția este injectivă. Dacă există o paralelă la axa absciselor care intersectează graficul funcției în două sau mai multe puncte, funcția nu este injectivă. Dacă $E(f)$ este mulțimea valorilor funcției f și orice paralelă la axa absciselor, dusă prin punctele axei ordonate ce se conțin în $E(f)$, taie graficul funcției f cel puțin într-un punct, funcția este surjectivă. Rezultă că o funcție f este bijectivă, dacă oricare paralelă la axa absciselor, dusă prin punctele lui $E(f)$, intersectează graficul lui f într-un singur punct.

a) Graficul funcției f este reprezentat în fig. 2.9.

Avem $E(f) = (-\infty, +\infty)$ și orice paralelă $y = m$, $m \in \mathbb{R}$, la axa absciselor intersectează graficul funcției f într-un singur punct. Deci f este funcție bijectivă.

b) Observăm că $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in [1; 5]$. Explicit, funcția $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{dacă } x^2 - 6x + 8 \geq 0, \\ -x^2 + 6x - 8, & \text{dacă } x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty), \\ -x^2 + 6x - 8, & \text{dacă } x \in (2, 4). \end{cases} \end{aligned}$$

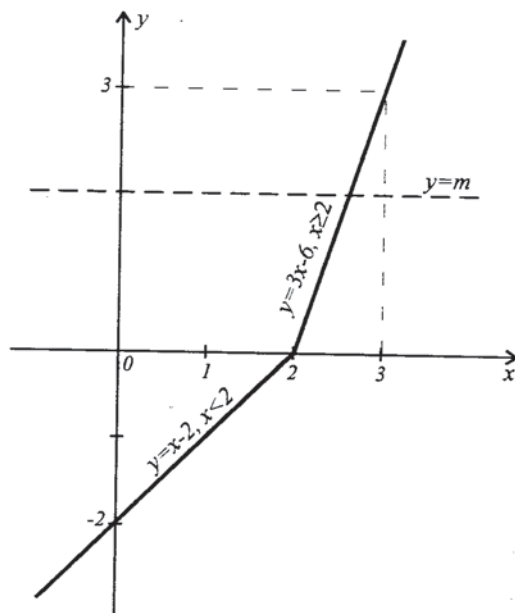


Fig. 2.9

Graficul funcției f este reprezentat în fig. 2.10.

Avem $E(f) = [0; 3] \subset [-1; 3]$. Orice paralelă $y = m$, $m \in (0, 1)$, intersectează graficul funcției f în patru puncte; paralela $y = 1$ intersectează graficul în trei puncte; orice paralelă $y = m$, $m \in (1; 3]$, intersectează graficul lui f în două puncte. Deci funcția f nu este nici surjectivă, nici injectivă.

c) Graficul funcției este reprezentat în fig. 2.11. Avem

$$D(f) = [-1, +\infty), E(f) = (-\infty, 3].$$

Orice paralelă $y = m$ la axa absciselor taie graficul funcției $f(x)$ în cel mult un punct ($y = -3, y = 2, y = 4$) și de aceea $f(x)$ este injectivă. Ecuația $f(x) = r \in \mathbb{R}$ are soluție numai pentru $r \leq 3$, deci $f(x)$ nu este funcție surjectivă.

d) Explicităm funcția f :

$$\begin{aligned} f(x) = \max(x + 1, 1 - x) &= \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } 1 - x \leq x + 1, \\ 1 - x, & \text{dacă } x + 1 < 1 - x \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \geq 0, \\ 1 - x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

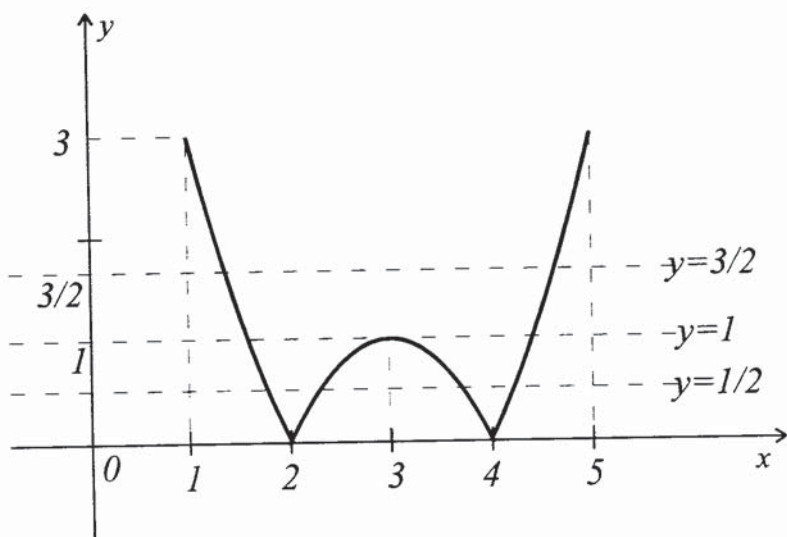


Fig. 2.10

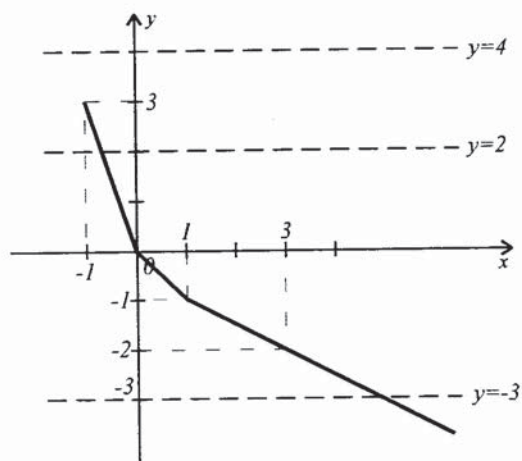


Fig. 2.11

Graficul funcției f este reprezentat în fig. 2.12.

Avem $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [1, +\infty)$. Orice paralelă $y = m$, $m \in (1, +\infty)$, intersectează graficul în două puncte și de aceea f nu este injectivă. Dreapta $y = 1/2 \in [0, +\infty)$ nu intersectează graficul funcției f , deci f nu este nici surjectivă.

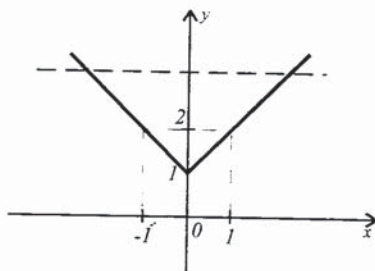


Fig. 2.12

11. Să se determine care din următoarele relații sunt aplicații; care din aplicații sunt injective, surjective, bijective?

- a) $\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x - y = 3\}$;
- b) $f = \{(x, y) \in [-1; 0] \times [-1; 1] | x^2 + y^2 = 1\}$;
- c) $g = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) | y = x^2\}$;
- d) $\psi = \{(x, y) \in [0, +\infty)^2 | y = x^2\}$.

Pentru funcția bijectivă să se indice inversa ei.

Soluție. a) $(x, y) \in \varphi \Leftrightarrow x - y = 3 \Leftrightarrow x = y + 3$. Deoarece

$$D(\varphi) = \delta_\varphi = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N} : x = y + 3\} \neq \mathbb{N}$$

(ecuația $2 = y + 3$ nu are soluții în $\mathbb{N}$), rezultă că φ nu este relație funcțională.

b) $(x, y) \in f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Atunci, deoarece $D(f) = \delta_f = [-1; 0]$, iar

$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1, \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &\in f, \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &\in f \end{aligned} \right.$$

cu $\sqrt{3}/2 \neq -\sqrt{3}/2$, și f nu este relație funcțională.

c) Avem: $(x, y) \in g \Leftrightarrow xgy \Leftrightarrow y = g(x) = x^2$. Atunci:

$$1) x \in [0, +\infty) \Rightarrow y = x^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, x^2) \in g;$$

- 2) $(xgy_1 \wedge xgy_2) \Rightarrow y_1 = x^2 = y_2$;
 3) $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$, deoarece $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$;

4) ecuația $g(x) = r \in \mathbb{R}$ are soluții în $[0, +\infty)$, dacă și numai dacă $r \geq 0$, ceea ce demonstrează că g nu este surjecție (numărul -2 , de exemplu, nu are preimagine în $[0, +\infty)$).

d) Avem: $(x, y) \in \psi \Leftrightarrow x\psi y \Leftrightarrow y = \psi(x) = x^2$. Repetând raționamentele din p. c), obținem că ψ este injecție. Mai mult, ecuația $\psi(x) = r \in [0, +\infty)$ are soluția $x = \sqrt{r} \in [0, +\infty)$ și de aceea ψ este aplicație surjectivă. Atunci ψ este aplicație bijectivă și, în conformitate cu teorema 6, relația ψ^{-1} este de asemenea aplicație (funcție).

În conformitate cu aceeași teoremă 6, avem

$$\psi^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty).$$

12. Fie $\{A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $\varphi \in F(A)$ dată cu ajutorul tabelului

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(x)$	2	2	1	3	4	5	3	2	1

- a) Să se determine $\varphi(\{2, 3, 5\})$; $\varphi(\{1, 3, 7, 9\})$; $\text{Im}\varphi$.
 b) Să se determine $\varphi^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$; $\varphi^{-1}(\{2, 3\})$; $\varphi^{-1}(\{7, 8, 9\})$.
 c) Să se calculeze $\varphi^{-1}(1)$; $\varphi^{-1}(4)$; $\varphi^{-1}(7)$.

Soluție. a) $\varphi(\{2, 3, 5\}) = \{\varphi(2), \varphi(3), \varphi(5)\} = \{2, 1, 4\}$;
 $\varphi(\{1, 3, 7, 9\}) = \{\varphi(1), \varphi(3), \varphi(7), \varphi(9)\} = \{2, 1, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$;
 $\text{Im}\varphi = \varphi(A) = \{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6), \varphi(7), \varphi(8), \varphi(9)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- b) $\varphi^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{y \in A | \varphi(y) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = A$;
 $\varphi^{-1}(\{2, 3\}) = \{a \in A | \varphi(a) \in \{2, 3\}\} = \{1, 2, 4, 7, 8\}$;
 $\varphi^{-1}(\{7, 8, 9\}) = \{b \in A | \varphi(b) \in \{7, 8, 9\}\} = \emptyset$.
 c) $\varphi^{-1}(1) = \{a \in A | \varphi(a) = 1\} = \{3, 9\}$;
 $\varphi^{-1}(4) = \{b \in A | \varphi(b) = 4\} = \{5\}$;
 $\varphi^{-1}(7) = \{c \in A | \varphi(c) = 7\} = \emptyset$.

13. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Examinăm relațiile
 $\alpha = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, c)\}$, $\beta = \{(1, b), (2, a), (3, c)\}$,
 $\gamma = \{(2, a), (3, c), (1, c)\}$.

- a) Să se determine $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$ și $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$.
 b) Care din relațiile α, β și γ sunt aplicații? Indicați tipul aplicației.

- c) Determinați relațiile α^{-1}, β^{-1} și γ^{-1} . Care din ele este funcție?
 d) Determinați relațiile $\alpha \circ \beta^{-1}, \beta \circ \alpha^{-1}, \alpha \circ \gamma^{-1}, \gamma \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \gamma^{-1}$ și $\gamma \circ \beta^{-1}$. Care din ele sunt aplicații?

Soluție. a) $\delta_\alpha = \{1, 2, 3\} = A = \delta_\beta = \delta_\gamma$; $\rho_\alpha = \{a, b, c\} = B = \rho_\beta$; $\rho_\gamma = \{a, c\}$.

b) α nu este aplicație, deoarece elementul 3 are două imagini a și c . β este aplicație bijectivă; γ este aplicație, nici injectivă (elementele 3 $\neq$ 1 au aceeași imagine c), nici surjectivă (b nu are preimagine).

c) $\alpha^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3), (c, 3)\}$, $\beta^{-1} = \{(b, 1), (a, 2), (c, 3)\}$, $\gamma^{-1} = \{(a, 2), (c, 3), (c, 1)\}$.

Avem $\delta_{\alpha^{-1}} = B = \delta_{\beta^{-1}}$, $\delta_{\gamma^{-1}} = \{a, c\} \neq B$, $\rho_{\alpha^{-1}} = A = \rho_{\beta^{-1}} = \rho_{\gamma^{-1}}$. α^{-1} nu este aplicație, fiindcă elementul a are două imagini 1 și 3; β^{-1} este aplicație bijectivă; γ^{-1} nu este aplicație, fiindcă $\delta_{\gamma^{-1}} \neq B$ (elementul b nu are imagine);

d) $\alpha \circ \beta^{-1} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;

$\beta \circ \alpha^{-1} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$;

$\alpha \circ \gamma^{-1} = \{(1, 2), (3, 2), (3, 3), (3, 1)\}$;

$\gamma \circ \alpha^{-1} = \{(2, 1), (3, 3), (1, 3), (2, 3)\}$;

$\beta \circ \gamma^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (3, 1)\}$;

$\gamma \circ \beta^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$.

Este aplicație numai relația $\gamma \circ \beta^{-1}$, nici injectivă, nici surjectivă.

14. Se dau funcțiile: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x \leq 2, \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2, \end{cases} \quad g(x) = \max(x - 1, 3 - x).$$

Să se arate că $f = g$.

Soluție. Funcțiile f și g sunt definite pe $\mathbb{R}$ și au valori în $\mathbb{R}$. Să arătăm că $f(x) = g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Explicităm funcția g :

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x - 1 \leq 3 - x, \\ x - 1, & \text{dacă } 3 - x < x - 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x \leq 2, \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} = f(x)$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Deci $f = g$.

15. Fiind date funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x \leq 2, \\ \frac{x + 10}{3}, & \text{dacă } x > 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x < 3, \\ 2x - 5, & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

a) Să se arate că f și g sunt funcții bijective.

b) Să se reprezinte grafic funcțiile f și f^{-1} în același reper de coordonate.

c) Să se determine funcțiile: $s = f + g$, $d = f - g$, $p = f \cdot g$, $q = f/g$.

d) Funcția d este oare bijectivă?

Soluție. a), b) Graficul funcției f este reprezentat în fig. 2.13 cu o linie continuă, iar graficul lui f^{-1} este reprezentat printr-o linie întreruptă.

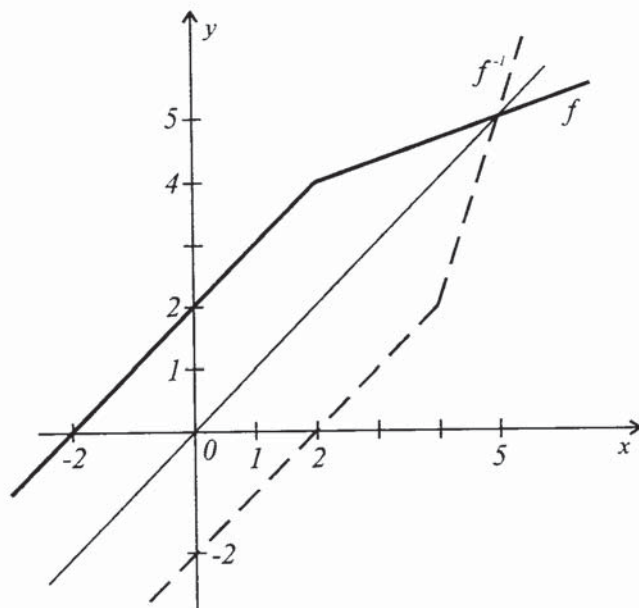


Fig. 2.13

Avem $g^{-1}, f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-2, & \text{dacă } x \leq 4, \\ 3x-10, & \text{dacă } x > 4; \end{cases} \quad g^{-1}(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x < 1, \\ \frac{1}{2}(x+5), & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

c) Compunem tabloul următor:

x	$(-\infty, 2]$	$(2, 3)$	$[3, +\infty)$
f	$x + 2$	$(x + 10)/3$	$(x + 10)/3$
g	$x - 2$	$x - 2$	$2x - 5$
$f + g$	$2x$	$4(x + 1)/3$	$(7x - 5)/3$
$f - g$	4	$(16 - 2x)/3$	$(25 - 5x)/3$
$f \cdot g$	$x^2 - 4$	$(x^2 + 8x - 20)/3$	$(2x^2 + 15x - 50)/3$
f/g	$\frac{x+2}{x-2}, x \neq 2$	$\frac{x+10}{3(x-2)}$	$\frac{x+10}{3(2x-5)}$

Avem

$$s(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \leq 2, \\ \frac{4}{3}(x+1), & \text{dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{1}{3}(7x-5), & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

$$d(x) = \begin{cases} 4, & \text{dacă } x \leq 2, \\ \frac{2}{3}(8-x), & \text{dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{5}{3}(5-x), & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{dacă } x \leq 2, \\ \frac{1}{3}(x^2 + 8x - 20), & \text{dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{1}{3}(2x^2 + 15x - 50), & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2}, & \text{dacă } x \leq 2, \\ \frac{x+10}{3(x-2)}, & \text{dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{x+10}{3(2x-5)}, & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

d) Avem $d(x) = 4$, $(\forall) x \in (-\infty, 2]$, și de aceea d nu este injectivă, adică d nu este bijectivă. Aceasta ne demonstrează că diferența (suma) a două funcții bijective nu este neapărat o funcție bijectivă.

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$,

$$f(x) = (ax + b)/(cx + d), \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0.$$

- Să se arate că funcția f este inversabilă.
- Să se determine f^{-1} .
- În ce caz avem $f = f^{-1}$?

Soluție. a) 1) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow acx_1x_2 + adx_1 + bcx_2 + bd = acx_1x_2 + bcx_1 + adx_2 + bd \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow adx_1 + bcx_2 = adx_2 + bcx_1 \Leftrightarrow ad(x_1 - x_2) - bc(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (ad - bc)(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectivă.

2) Fie $r \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$. Examinăm ecuația $f(x) = r$. Atunci

$$f(x) = r \Leftrightarrow (ax + b)/(cx + d) = r \Leftrightarrow ax + b = crx + dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - cr)x = dr - b \xrightarrow{r \neq \frac{a}{c}} x = (dr - b)/(a - cr).$$

Dacă $x = (dr - b)/(a - cr) = -d/c \Leftrightarrow cdr - bc = -ad + cdr \Leftrightarrow ad - bc = 0$. Imposibil. Deci $(dr - b)/(a - cr) \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, ceea ce demonstrează că ecuația $f(x) = r$ are soluții în $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ pentru orice $r \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$. Aceasta ne demonstrează că f este funcție surjectivă.

Din 1) - 2) rezultă că f este funcție bijectivă, deci și inversabilă.

b) Determinăm $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{a/c\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow (cf(x) - a)x = b - df(x) \xrightarrow{f(x) \neq \frac{a}{c}} x = \frac{-df(x) + b}{cf(x) - a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}.$$

c) Pentru a avea $f = f^{-1}$, este necesar ca funcțiile f și f^{-1} să aibă același domeniu de definiție și deci $d = -a$. Această condiție este și suficientă pentru egalitatea funcțiilor f și f^{-1} . În adevăr, dacă $d = -a$, funcțiile f și f^{-1} sunt definite pe $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$, iau valori în $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ și $f^{-1}(x) = (ax + b)/(cx + d) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$, adică $f^{-1} = f$.

17. Să se reprezinte funcția $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 8}$ ca o compoziție a două funcții.

Soluție. Punem $u(x) = x^2 - 2x + 8$ și $v(x) = \sqrt{x}$. Atunci
 $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 8} = v(5x^2 - 2x + 8) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$.

Răspuns: $f(x) = (v \circ u)(x)$ cu $u(x) = 5x^2 - 2x + 8$, $v(x) = \sqrt{x}$.

18. Să se calculeze $f \circ g$, $g \circ f$, $(f \circ g)(4)$ și $(g \circ f)(4)$, unde:

a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ și $g(x) = \sqrt{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$ și $g(x) = x^2 - 4$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & \text{dacă } x < -3, \\ -2x - 5, & \text{dacă } x \geq -3 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{dacă } x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 4, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Indicați $D(f \circ g)$ și $D(g \circ f)$.

Soluție. a) Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{3}{\sqrt{x}-1}$;

$$(f \circ g)(4) = \frac{3}{\sqrt{4}-1} = 3; \quad D(f \circ g) = [0; 1) \cup (1, +\infty).$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{3}{x-1}}; \quad (g \circ f)(4) = \sqrt{\frac{3}{4-1}} = 1;$$

$$D(g \circ f) = (1, +\infty).$$

Deci $(g \circ f)(4) \neq (f \circ g)(4)$, ceea ce demonstrează că legea comutativă a compunerii funcțiilor, în general, nu are loc: $f \circ g \neq g \circ f$.

$$b) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2-4)+3} = \sqrt{x^2-1};$$

$$x \in D(f \circ g) \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = D(f \circ g).$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+3}) = (\sqrt{x+3})^2 - 4 = x-1; \quad D(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

$$(f \circ g)(4) = \sqrt{4^2-1} = \sqrt{15}, \quad (g \circ f)(4) = 4-1 = 3.$$

c) Pentru a determina funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$, în acest caz procedăm în modul următor:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) + 6g(x), & \text{dacă } g(x) < -3, \\ -2g(x) - 5, & \text{dacă } g(x) \geq -3 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} g^2(x) + 6g(x), & \text{dacă } g(x) < -3, \\ -2g(x) - 5, & \text{dacă } g(x) \geq -3 \text{ și } x \leq 1, \\ -2(x^2 - 2x + 4) - 5, & \text{dacă } g(x) \geq -3 \text{ și } x > 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (5x-2)^2 + 6(5x-2), & \text{dacă } 5x-2 < -3, \\ -2(5x-2) - 5, & \text{dacă } 5x-2 \geq -3 \text{ și } x \leq 1, \\ -2(x^2 - 2x + 4) - 5, & \text{dacă } 5x-2 \geq -3 \text{ și } x > 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 25x^2 + 10x - 8, & \text{dacă } x < -1/5, \\ -10x - 1, & \text{dacă } -1/5 \leq x \leq 1, \\ -2x^2 + 4x - 13, & \text{dacă } x > 1. \end{cases} \\ (f \circ g)(4) &= -2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 13 = -29. \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 5f(x) - 2, & \text{dacă } f(x) \leq 1, \\ f^2(x) - 2f(x) + 4, & \text{dacă } f(x) > 1. \end{cases}$$

Observăm că

$$\begin{aligned} f(x) \leq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + 6x \leq 1, \\ x < -3 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x - 5 \leq 1, \\ x \geq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in [-3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}], \\ x < -3 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x \leq 6, \\ x \geq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3 - \sqrt{10}; -3), \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3 - \sqrt{10}; -3) \cup [-3, +\infty). \end{aligned}$$

Deci pentru $f(x) \leq 1$, obținem

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 5(x^2 + 6x) - 2, & \text{dacă } x \in [-3 - \sqrt{10}, -3) \\ 5(-2x - 5) - 2, & \text{dacă } x \in [-3, +\infty). \end{cases}$$

În mod analog,

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x > 1, \\ x < -3 \\ -2x - 5 > 1, \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -3 - \sqrt{10}), \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

și de aceea pentru $f(x) > 1$, obținem

$$(g \circ f)(x) = (x^2 + 6x)^2 - 2(x^2 + 6x) + 4 = x^4 + 12x^3 + 34x^2 - 12x + 4$$

pentru $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{10})$.

Totalizând, avem

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^4 + 12x^3 + 34x^2 - 12x + 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -3 - \sqrt{10}), \\ 5x^2 + 30x - 2, & \text{dacă } x \in [-3 - \sqrt{10}, -3), \\ -10x - 7, & \text{dacă } x \geq -3. \end{cases}$$

$$(g \circ f)(4) = -10 \cdot 4 - 27 = -67.$$

19. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(g \circ f \circ f)(x) = (f \circ g \circ g)(x)$, dacă $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x + 3$;

b) $(f \circ f \circ f)(x) = x$, dacă $f(x) = \frac{ax + 1}{x + a}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$;

c) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, dacă $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = 4x^3 - 3x$.

Soluție. a) Determinăm funcțiile $(g \circ f \circ f)(x)$ și $(f \circ g \circ g)(x)$:

$$(g \circ f \circ f)(x) = g(f(f(x))) = g(f(3x + 1)) = g(3(3x + 1) + 1) =$$

$$= g(9x + 4) = 9x + 4 + 3 = 9x + 7;$$

$$(f \circ g \circ g)(x) = f(g(g(x))) = f(g(x + 3)) = f((x + 3) + 3) =$$

$$= f(x + 6) = 3(x + 6) + 1 = 3x + 19.$$

Ecuația devine

$$9x + 7 = 3x + 19 \Leftrightarrow x = 2.$$

Răspuns: $x = 2$.

b) Calculăm $(f \circ f \circ f)(x)$:

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f\left(f\left(\frac{ax + 1}{x + a}\right)\right) =$$

$$= f\left(\frac{a \cdot \frac{ax + 1}{x + a} + 1}{\frac{ax + 1}{x + a} + a}\right) = f\left(\frac{ax^2 + x + 2a}{2ax + 1 + a^2}\right) =$$

$$= \frac{a \cdot \frac{ax^2 + x + 2a}{2ax + 1 + a^2} + 1}{\frac{ax^2 + x + 2a}{2ax + 1 + a^2} + a} = \frac{a^3x + 3ax + 3a^2 + 1}{3a^2x + x + 3a + a^3} =$$

$$= ((a^3 + 3a)x + (3a^2 + 1)) / ((3a^2 + 1)x + (a^3 + 3a)).$$

Ecuatia devine

$$\frac{(a^3 + 3a)x + (3a^2 + 1)}{(3a^2 + 1)x + (a^3 + 3a)} = x \Leftrightarrow (3a^2 + 1)x^2 = 3a^2 + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Răspuns: $x \in \{-1, 1\}$.

c) Determinăm $(f \circ g)(x)$ și $(g \circ f)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x^3 - 3x) = 2(4x^3 - 3x)^2 - 1 = \\ = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)^3 - 3(2x^2 - 1) = \\ = 4(8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1) - 6x^2 + 3 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Ecuatia devine

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0, \\ \text{adică egalitatea este adevărată pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Răspuns: $x \in \mathbb{R}$.

20. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date de $f(x) = x^2 + x + 12$ și $g(x) = x^2 - x + 2$. Să se arate că nu există nici o funcție $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$(\varphi \circ f)(x) + (\varphi \circ g)(x) = (g \circ f)(x), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}. \quad (A)$$

Soluție. Relația (A) mai poate fi scrisă

$$\varphi(x^2 + x + 2) + \varphi(x^2 - x + 2) = (x^2 + x + 2)^2 - (x^2 + x + 2) + 2. \quad (A')$$

Presupunem că există o funcție $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ce satisface relația (A'). Punem în (A') $x = 1$ și $x = -1$. Obținem:

$$\varphi(4) + \varphi(2) = 14, \quad \varphi(2) + \varphi(4) = 4,$$

ceea ce implică $\varphi(4) + \varphi(2) \neq \varphi(2) + \varphi(4)$, contradicție cu ipoteza. Deci nu există o funcție φ cu proprietatea din enunț.

21. Să se determine toate valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^2 - x$ și $g(x) = x^2 + ax + b$.

Soluție. Determinăm $f \circ g$ și $g \circ f$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + ax + b) = (x^2 + ax + b)^2 - (x^2 + ax + b) = \\ = x^4 + 2ax^3 + (2b - 1)x^2 + a^2x^2 + b^2 - ax - b + 2abx = \\ = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b - 1)x^2 + (2ab - a)x + b^2 - b.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 + a(x^2 - x) + b = x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - ax + b.$$

Atunci

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b - 1)x^2 + (2ab - a)x + b^2 - b = x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - ax + b \Leftrightarrow$$

$$(\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2, \\ a^2 + 2b - 1 = a + 1, \\ 2ab - a = -a, \\ b = b^2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 0. \end{cases}$$

Răspuns: $a = -1, b = 0, g(x) = x^2 - x = f(x)$.

22. Sunt date funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3, g(x) = x^3 + x + 3 \text{ și } h(x) = x^3 + 8.$$

Să se arate că:

- f nu este injectivă;
- g este injectivă;
- h este bijectivă și să se determine h^{-1} .

Soluție. a) Fie $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci

$$x_1^4 + 4x_1^3 + 3 = x_2^4 + 4x_2^3 + 3 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 - x_2) \times (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \nRightarrow x_1 = x_2.$$

De exemplu, $f(x) = x^3(x+4) + 3$, luând $x_1 = 0$ și $x_2 = -4$, obținem $f(0) = f(-4) = 3, x_1 \neq x_2$.

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x_1) = g(x_2) &\Leftrightarrow x_1^3 + x_1 + 3 = x_2^3 + x_2 + 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

deoarece

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 > 0, (\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

c) $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + 8 = x_2^3 + 8 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
adică h este funcție injectivă.

Demonstrăm că h este surjectivă. Fie $r \in \mathbb{R}$. Rezolvăm ecuația $h(x) = r \Leftrightarrow x^3 + 8 = r \Leftrightarrow x^3 = r - 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{r-8}$ (rădăcina de ordin impar există din orice număr real). Deci h este surjecție, prin urmare, h este funcție bijectivă.

Determinăm h^{-1} :

$$\begin{aligned} (y, x) \in G_{h^{-1}} &\Leftrightarrow (x, y) \in G_h \Leftrightarrow h(x) = y = x^3 + 8 \Leftrightarrow x^3 = y - 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-8} \Leftrightarrow h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}. \end{aligned}$$

23. Fie $f: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ cu

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1.$$

a) Să se demonstreze că f este funcție bijectivă.

b) Să se determine f^{-1} .

Soluție. a) Avem $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$. Reprezentăm această funcție ca compoziție a două funcții:

$u, v: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, unde $u(x) = x^3$, $v(x) = x^2 - x + 1$.

Atunci $f(x) = (u \circ v)(x)$, ce implică $f = u \circ v$, este bijectivă fiind compoziție a două funcții bijective.

b) $f^{-1} = (u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$. Determinăm v^{-1} și u^{-1} .

$u^{-1}: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, $u^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Deoarece $v(x) = x^2 - x + 1 = y \Rightarrow x^2 - x + 1 - y = 0$. Rezolvăm în raport cu $x \in [1, +\infty)$ această ecuație. Discriminantul este

$$D = 1 - 4(1 - y) = 4y - 3 \text{ și } x_{1,2} = (1 \mp \sqrt{4y - 3})/2$$

$$(y \geq 1 \Leftrightarrow 4y - 3 \geq 0!).$$

Ecuația are o singură rădăcină în $[1, +\infty)$:

$$x = (1 + \sqrt{4y - 3})/2.$$

Atunci

$$v^{-1}(x) = (1 + \sqrt{4x - 3})/2.$$

Așadar,

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= (v^{-1} \circ u^{-1})(x) = v^{-1}(u^{-1}(x)) = v^{-1}(\sqrt[3]{x}) = \\ &= (1 + \sqrt{4\sqrt[3]{x} - 3})/2, \text{ cu } f^{-1}: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty). \end{aligned}$$

24. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $(\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

2) $f(1) = 1$;

3) $f(1/x) = 1/x^2 \cdot f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se determine funcția f .

b) Să se calculeze $f(\sqrt{1998})$.

Soluție. a) Pentru $x_2 = 0$ din 1), rezultă $f(x_1) = f(x_1) + f(0)$, ceea ce implică $f(0) = 0$. Pentru $x_2 = -x_1$ din 1), obținem

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x_1) + f(-x_1) = 0 \Rightarrow f(-x_1) = -f(x_1) \Rightarrow f(x_2) = \\ &= -f(-x_2) \Rightarrow f(-x_2) = -f(x_2). \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} f(x_1 - x_2) &= f(x_1 + (-x_2)) \stackrel{1)}{=} f(x_1) + f(-x_2) = \\ &= f(x_1) - f(x_2), \quad (\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Fie $x \notin \{0, 1\}$. Atunci

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) \stackrel{3)}{=} \frac{1}{(1-x)^2} \cdot f(1-x) \stackrel{1)}{=} \frac{f(1) - f(x)}{(1-x)^2}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Pe de altă parte, } \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} \text{ implică} \\
& f\left(\frac{1}{1-x}\right) = f\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) \stackrel{1)}{=} f(1) + f\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1 + f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \\
& \stackrel{3)}{=} 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{x}\right) = 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot \left[f\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right] = \\
& \stackrel{1)}{=} 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)\right) = 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cdot f(x) - 1\right) = \\
& = 1 + \frac{1}{(1-x)^2} \cdot f(x) - \frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Din (2) și (3) urmează

$$\frac{f(1) - f(x)}{(1-x)^2} = \frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2} \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Deci $f(x) = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

b) $f(\sqrt{1998}) = \sqrt{1998}$.

Răspuns: a) $f(x) = x$; b) $f(\sqrt{1998}) = \sqrt{1998}$.

25. Folosind proprietățile funcției caracteristice, să se demonstreze egalitatea

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A, B, C \in P(M).$$

Soluție. Folosind proprietățile $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$, vom demonstra egalitatea cerută calculând cu ajutorul lui f_A, f_B și f_C funcțiile caracteristice ale mulțimilor $A \cup (B \cap C)$ și $(A \cup B) \cap (A \cup C)$:

$$\begin{aligned}
f_{A \cup (B \cap C)} & \stackrel{6)}{=} f_A + f_{B \cap C} - f_A \cdot f_{B \cap C} \stackrel{4)}{=} f_A + f_B \cdot f_C - f_A(f_B \cdot f_C) = \\
& = f_A + f_B \cdot f_C - f_A \cdot f_B \cdot f_C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{(A \cup B) \cap (A \cup C)} & = f_{A \cup B} \cdot f_{A \cup C} \stackrel{6)}{=} (f_A + f_B - f_A \cdot f_B)(f_A + f_C - f_A \cdot f_C) = \\
& = f_A^2 + f_A \cdot f_C - f_A^2 \cdot f_C + f_B \cdot f_A + f_B \cdot f_C - f_B \cdot f_A \cdot f_C - f_A^2 \cdot f_B - \\
& \quad - f_A \cdot f_B \cdot f_C + f_A^2 \cdot f_B \cdot f_C \stackrel{3)}{=} f_A + f_B \cdot f_C - f_A \cdot f_B \cdot f_C = f_{A \cup (B \cap C)},
\end{aligned}$$

ceea ce implică $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.3. Exerciții propuse

1. Determinați domeniile de definiție și de valori ale relațiilor:

1) $\alpha = \{(2, 4), (3, 1), (2, -4), (0, 27)\}$;

2) $\beta = \{(100, 10), (200, 20), (300, 30), (400, 40)\}$;

3) $\gamma = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11)\}$;

4) $\delta = \{(1/2, 5)\}$;

$$5) \rho = \{(-2, -5), (-2, 0), (7, -2), (9, 0)\};$$

$$6) \omega = \{(-1, 2), (-5, -2), (0, -2), (0, 9)\}.$$

2. Fie $A = \{2, 4, 6, 8\}$ și $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $\alpha \subseteq A \times B$.

a) Să se determine graficul relației α .

b) Să se construiască schema relației α :

$$1) \alpha = \{(x, y) | x < 3 \text{ și } y > 3\};$$

$$2) \alpha = \{(x, y) | x > 2 \text{ și } y < 5\};$$

$$3) \alpha = \{(x, y) | x > 6 \text{ sau } y > 7\};$$

$$4) \alpha = \{(x, y) | \max(x, y) \leq 3\};$$

$$5) \alpha = \{(x, y) | \min(x, y) \leq 2\};$$

$$6) \alpha = \{(x, y) | \min(x, y) > 6\};$$

$$7) \alpha = \{(x, y) | \min(x, 5) > \max(y, 3)\};$$

$$8) \alpha = \{(x, y) | \max(x, 6) > \max(y, 5)\}.$$

3. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Să se scrie graficul relației $\alpha \subseteq A \times B$, dacă:

$$1) \alpha = \{(x, y) | x + y = 9\};$$

$$2) \alpha = \{(x, y) | 2x - y = 1\};$$

$$3) \alpha = \{(x, y) | x^2 - y^2 = 8\};$$

$$4) \alpha = \{(x, y) | x - y \geq 3\};$$

$$5) \alpha = \{(x, y) | y : x\};$$

$$6) \alpha = \{(x, y) | 4x + y = 11\};$$

$$7) \alpha = \{(x, y) | (x + y) : 3\};$$

$$8) \alpha = \{(x, y) | x \geq y\}.$$

4. Fie $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ și G graficul relației α . Să se scrie relația α prin propoziții conținând literele x și y , cu $x \in A$ și $y \in B$:

$$1) G_\alpha = \{(1, 5), (4, 2), (5, 1)\};$$

$$2) G_\alpha = \{(1, 2), (4, 5), (5, 6)\};$$

$$3) G_\alpha = \{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\};$$

$$4) G_\alpha = \{(1, 5), (1, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 5), (5, 6)\};$$

$$5) G_\alpha = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\};$$

$$6) G_\alpha = \{(4, 2), (4, 6)\};$$

$$7) G_\alpha = \{(4, 1), (4, 2), (4, 5), (4, 6), (1, 6), (3, 6), (5, 6)\};$$

$$8) G_\alpha = \{(1, 1), (4, 2)\}.$$

5. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se cerceteze proprietățile relației $\alpha \subseteq A^2$ (var. 1-6) și $\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ (var. 7-14):

- 1) $\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;
- 2) $\alpha = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$;
- 3) $\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
- 4) $\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
- 5) $\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;
- 6) $\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
- 7) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 1 \text{ și } y > 1\}$;
- 8) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}\}$;
- 9) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ sau } y < 0\}$;
- 10) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1 \text{ sau } y > 1\}$;
- 11) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + x = y^2 + y\}$;
- 12) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 3x + 2 = y^2 - 3y + 2\}$;
- 13) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + x = y^2 - y\}$;
- 14) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2\}$.

6. Pentru fiecare din relațiile binare α definite pe mulțimea $\mathbb{N}$:

- a) să se determine domeniul de definiție δ_α și domeniul de valori ρ_α ;
- b) să se stabilească proprietățile (reflexivitatea, ireflexivitatea, simetria, antisimetria, tranzitivitatea);

c) să se determine relația inversă α^{-1} ($x, y \in \mathbb{N}$):

- 1) $x\alpha y \Leftrightarrow \text{c.m.m.d.c.}(x, y) = 1$;
- 2) $x\alpha y \Leftrightarrow y < 2x$;
- 3) $x\alpha y \Leftrightarrow |y - x| = 12$;
- 4) $x\alpha y \Leftrightarrow x = y^2$;
- 5) $x\alpha y \Leftrightarrow (x - y):3$;
- 6) $x\alpha y \Leftrightarrow x \cdot y = 30$;
- 7) $x\alpha y \Leftrightarrow y = 2x + 1$;
- 8) $x\alpha y \Leftrightarrow x < y + 1$;
- 9) $x\alpha y \Leftrightarrow x < y - 1$;
- 10) $x\alpha y \Leftrightarrow y = 2x$;
- 11) $x\alpha y \Leftrightarrow y^2 = x^2$;
- 12) $x\alpha y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$.

7. Este dată mulțimea A și relația binară $\alpha \subseteq A^2$. Să se demonstreze că α este relație de echivalență și să se determine mulțimea factor A/α .

- 1) $A = \{1, 2, 3\}$, $\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- 2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (2, 3)\}$;
- 3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha = \{(1, 4), (1, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$;
- 4) $A = \{1, 2, 3\}$, $\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- 5) $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $\alpha = \{(1, 6), (6, 1), (1, 1), (6, 6), (3, 3), (5, 5)\}$;

- 6) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha = \{(1, 3), (1, 4), (1, 1), (3, 3), (3, 1), (4, 1), (4, 4), (2, 2), (3, 4), (4, 3)\}$;
 7) $A = \mathbb{N}^2$, $(a, b)\alpha(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$;
 8) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $(a, b)\alpha(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$;
 9) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$, $\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 2), (4, 4), (3, 3), (2, 1), (6, 6), (9, 9)\}$;
 10) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $\alpha = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (2, 3), (5, 5)\}$.

8. Fie dată mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și sistemul de submulțimi $S = \{A_i \subseteq A, i = \overline{1, n}\}$. Demonstrați că S definește o partiție pe A și construiți relația de echivalență α_S .

- 1) $A_1 = \{1, 2, 3, 8, 9\}$, $A_2 = \{4\}$, $A_3 = \{5, 6, 7\}$;
- 2) $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$, $A_4 = \{7, 8\}$, $A_5 = \{9\}$;
- 3) $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$, $A_4 = \{7, 8, 9\}$;
- 4) $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_3 = \{2, 7\}$, $A_4 = \{6, 9\}$, $A_5 = \{8\}$;
- 5) $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 9\}$, $A_3 = \{4, 8\}$, $A_4 = \{5, 6, 7\}$;
- 6) $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 8, 9\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$, $A_4 = \{7\}$;
- 7) $A_1 = \{1, 9, 7\}$, $A_2 = \{2, 8, 6\}$, $A_3 = \{3, 4, 5\}$;
- 8) $A_1 = \{7, 8\}$, $A_2 = \{1, 9\}$, $A_3 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$;
- 9) $A_1 = \{1, 8, 9\}$, $A_2 = \{2, 7\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{5\}$, $A_5 = \{3, 6\}$;
- 10) $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_2 = \{2, 4, 6, 8\}$.

9. Definim pe $\mathbb{R}$ relația binară α :

$$x\alpha y \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x = \ln^2 y - \ln y.$$

- a) Să se arate că α este o relație de echivalență pe $\mathbb{R}$.
- b) Să se determine clasele de echivalență.

10. Definim pe $\mathbb{R}$ relația binară β :

$$x\beta y \Leftrightarrow \sin^2 x - 2 \sin x = \sin^2 y - 2 \sin y.$$

- a) Să se arate că β este o relație de echivalență.
- b) Să se determine clasele de echivalență.

11. Fie $\alpha \subseteq A^2$, unde $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cu

$$x\alpha y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y).$$

- a) Este α o relație de echivalență?
- b) În caz afirmativ, să se determine clasele de echivalență.

12. Să se determine $\delta_\alpha, \rho_\alpha, \alpha^{-1}, \alpha \circ \alpha, \alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^{-1} \circ \alpha$, dacă:

- 1) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | y : x\}$;
- 2) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x : y\}$;
- 3) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 0\}$;
- 4) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x \geq 3y\}$;
- 5) $\alpha = \{(x, y) \in [-\pi/2, -\pi/2]^2 | y \geq \sin x\}$.

13. Să se determine relațiile $\alpha \circ \beta, \beta \circ \alpha, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}, (\beta \circ \alpha)^{-1}$:

- 1) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$;
- 2) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$;
- 3) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y < 2\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - y > 0\}$;
- 4) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 > 1\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}$;
- 5) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | x-y \text{ este par}\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | x-y \text{ este impar}\}$;
- 6) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | |x| = |y|\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | y = 2^x\}$;
- 7) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x : y\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | y : x\}$;
- 8) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x^y = 1\}, \beta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x \cdot y = 1\}$.

14. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$. Să se determine domeniul de definiție și domeniul de valori ale fiecărei din următoarele relații α, β . Care din aceste relații sunt aplicații? Determinați tipul aplicației. Determinați relațiile $\alpha^{-1} \circ \alpha, \alpha \circ \beta^{-1}, \beta \circ \alpha^{-1}, \beta \circ \beta^{-1}$. Sunt ele aplicații?

- 1) $\alpha = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, d)\}, \beta = \{(1, d), (2, a), (3, c), (4, b)\}$;
- 2) $\alpha = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, c), (4, d)\},$
 $\beta = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$;
- 3) $\alpha = \{(2, a), (3, c), (4, d), (1, b), (2, b)\},$
 $\beta = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d)\}$.

15. Considerăm aplicația $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sin x$. Să se determine $\varphi(\mathbb{R}), \varphi((0, \pi)), \varphi^{-1}([-1, 0]), \varphi^{-1}(1/2), \varphi^{-1}([1, 2]), \varphi^{-1}((1, 2])$.

16. Aplicația $\varphi: A \rightarrow B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, este dată de tabelul

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(x)$	a	d	b	f	b	c	b	d	e

Să se determine $\varphi(A), \varphi(\{2, 3, 5\}), \varphi(\{5, 6, 7, 8\}), \varphi(\{1, 3, 7, 9\}), \varphi^{-1}(\{b, f, c\}), \varphi^{-1}(\{e, c\}), \varphi^{-1}(d)$.

17. Considerăm aplicația $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = [x]$ ($[x]$ este partea întreagă a lui x). Să se determine $\varphi(\{2, 4, 6, 7\})$, $\varphi((1, 5))$, $\varphi([-2.5; 2])$, $\varphi^{-1}(\{2, 4, 5\})$ și $\varphi^{-1}(-1)$.

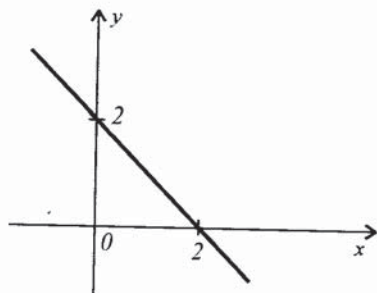
18. Se dă aplicația $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\varphi(x) = x^2$. Determinați $\varphi(A)$ și $\varphi^{-1}(A)$, dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

19. Fie A și B două mulțimi finite, $|A| = m$, $|B| = n$. Câte aplicații surjective $\varphi: A \rightarrow B$ există, dacă:

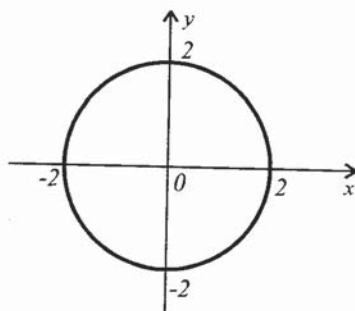
- 1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $m = 4$, $n = 3$; 4) $m = 5$, $n = 3$;
5) $m = 5$, $n = 4$; 6) $m = n = 5$?

20. Fiind dat graficul relației α , stabiliți dacă α este funcție. Determinați δ_α și ρ_α . Schimbând δ_α și ρ_α , faceți ca α să devină aplicație injectivă, surjectivă și bijectivă. Construiți graficul relației α^{-1} . Relația α^{-1} este funcție? Care este tipul ei?

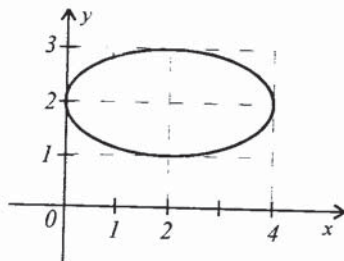
1) $\alpha: x + y = 2$



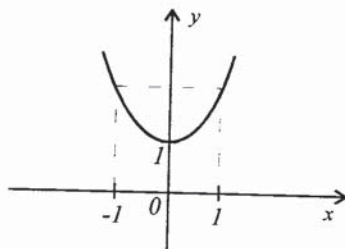
2) $\alpha: x^2 + y^2 = 4$



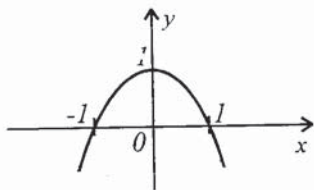
3) $\alpha: (x - 2)^2/4 + (y - 2)^2 = 1$



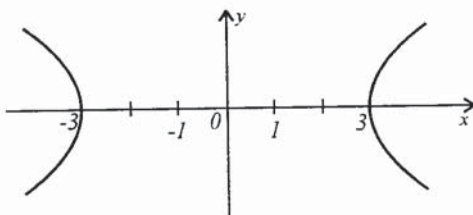
4) $\alpha: y = x^2 + 1$



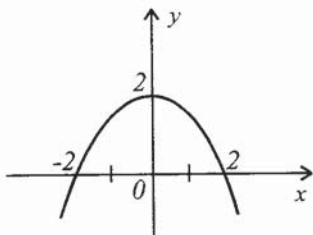
5) $\alpha: y = -x^2 + 1$



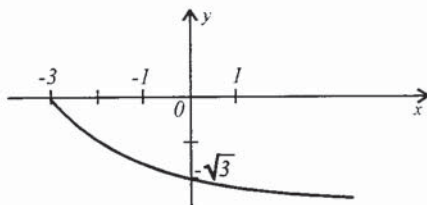
6) $\alpha: x^2 - y^2 = 9$



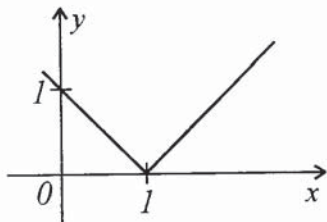
7) $\alpha: y = 4 - x^2$



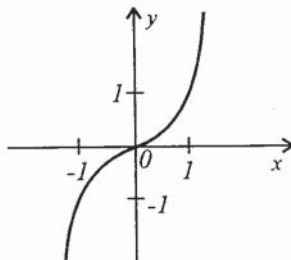
8) $\alpha: y = -\sqrt{x+3}$



9) $\alpha: y = |x - 1|$



10) $\alpha: y = x^3$



21. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 5, 6\}$ și $C = \{7, 8, 9\}$.

a) Să se facă diagramele a două funcții injective și a două funcții neinjective definite pe C cu valori în B .

b) Să se facă diagramele a două funcții surjective și a două aplicații nesurjective definite pe A cu valori în C .

c) Să se facă diagramele a două funcții bijective și a două funcții nebijective definite pe A cu valori în B .

22. Fie $A = \{1, 3, 5, 6\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $x \in A$, $y \in B$. Care dintre relațiile de mai jos reprezintă o funcție definită pe A cu valori în B ? Dar o funcție definită pe B cu valori în A ? Pentru funcții, indicați

tipul lor:

- 1) $\alpha: x + y = 6$; 2) $\alpha: y = x + 1$; 3) $\alpha: x = y$;
- 4) $\alpha: y = x^2$; 5) $\alpha: y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$;
- 6) $\alpha: y^5 - 11y^4 + 41y^3 - 61y^2 + 30y - x + 1 = 0$.

23. Utilizându-se graficul funcției $f: A \longrightarrow B$, să se arate dacă f este injectivă, surjectivă, bijectivă. În cazul funcției bijective, să se determine f^{-1} și să se construiască graficele lui f și f^{-1} în același reper de coordonate.

- 1) $f: (-2; 0) \cup [2, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = |x|$;
- 2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [2, +\infty)$, $f(x) = |x| + |x - 2|$;
- 3) $f: [-2, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} -x/2, & -2 \leq x \leq 0, \\ x + 1, & x > 0; \end{cases}$
- 4) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$
- 5) $f: \{0, 1, 3\} \longrightarrow \{-2, 0, 4\}$, $f(x) = 2x - 2$;
- 6) $f: \{-3, 0, 2\} \longrightarrow \{1, 11/5, 3, 4\}$, $f(x) = 0.2(2x + 11)$.

24. Care din următoarele relații $\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ sunt funcții? Indicați domeniul de definiție al funcțiilor. Stabiliți tipul funcției:

- 1) $\alpha: 2y - 3x = 19$; 2) $\alpha: x \cdot y = 9$; 3) $\alpha: 3x - 7 + 5y = 0$;
- 4) $\alpha: 2x^2 + 3y - 6 = 0$; 5) $\alpha: y = \sqrt{x - 2}$; 6) $\alpha: xy - 2y + 5x - 7 = 0$;
- 7) $\alpha: x^2 - (y - 2)^2 = 0$; 8) $\alpha: 3(4 - 5x) + 4(y + 5) = 1$;
- 9) $\alpha: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$; 10) $\alpha: x^2 - y + 7x = 3$;
- 11) $\alpha: 4x - 2y = 9x + y$; 12) $\alpha: y^2 + xy + 1 = 0$;
- 13) $\alpha: x^2 + y^2 = 16$; 14) $\alpha: y = x^2 - 3x + 1$; 15) $\alpha: 2xy = y^2 + 5$.

25. Este dată relația α cu $\delta_\alpha = [-3; 5]$ și $\rho_\alpha = [-4; 7]$.

a) Perechea $(-4, 5)$ aparține relației α ? De ce?

b) Indicați toate perechile ordonate $(x, y) \in \alpha$ cu $x = 0$. Explicați.

26. Fiind dată funcția $f(x)$, calculați valorile ei în punctele indicate.

- 1) $f(x) = -7$; $f(4)$, $f(-3)$, $f(c)$, $c \in \mathbb{R}$;
- 2) $f(x) = |x^3 - 2x|$; $f(5)$, $f(-2)$, $f(-7)$, $f(1, 4)$;
- 3) $f(x) = x^4 - x^3 - x - 3$; $f(0)$, $f(-1)$, $f(2 + c)$;
- 4) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & \text{dacă } x > 0, \\ 2x + 3, & \text{dacă } x \leq 0, \end{cases}$ $f(-2)$, $f(0)$, $f(5)$;

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x > 0, \\ -4, & \text{dacă } x = 0, \\ 1 - 2x, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad f(5), f(-1), f(1/2);$$

$$6) f(x) = x^2 - 5x + 2; (f(1+c) - f(1))/c, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

27. Determinați $D(f)$, dacă:

- 1) $f(x) = (2x+3)/(|x-4|)$; 2) $f(x) = \sqrt{|2x+1|}$;
- 3) $f(x) = 5/(x^2+x+1)$; 4) $f(x) = 3 - 2/(5-x)$;
- 5) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2+13x-5}$; 6) $f(x) = (4x)/(9-4x^2)$;
- 7) $f(x) = (5x)/(\sqrt{4-3x})$; 8) $f(x) = \pi$;
- 9) $f(x) = (5x)/(x^2-2x-15)$.

28. Fiind date funcțiile $f(x)$ și $g(x)$, determinați funcțiile $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ și f/g , indicând domeniul de definiție al acestora.

- 1) $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$; 2) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $g(x) = 2x+1$;
- 3) $f(x) = x-5$, $g(x) = x^2+1$; 4) $f(x) = x-3$, $g(x) = 2/x$;
- 5) $f(x) = x^2-4$, $g(x) = 1-x^2$; 6) $f(x) = 3/x$, $g(x) = 4/x$;
- 7) $f(x) = x-1$, $g(x) = x^2-5x+6$; 8) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, $g(x) = x$;
- 9) $f(x) = 5$, $g(x) = -3$; 10) $f(x) = 1-x^2$, $g(x) = 4x$.

29. Reprezentați funcția $f(x)$ sub formă de compoziție a unor funcții:

- 1) $f(x) = 7(4x-9)^5 + 4$; 2) $f(x) = (x^2+3x)^{\frac{2}{3}} + (x^2+3x)^{\frac{1}{3}} - 7$;
- 3) $f(x) = 1/\sqrt{x^2-3}$; 4) $f(x) = 4(x^2-3)^6 - 7$;
- 5) $f(x) = -2(x+5)^4 + 10$; 6) $f(x) = (2x-3)^2 - (2x-3) + 1$;
- 7) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$; 8) $f(x) = (x-1)^{\frac{4}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}} - 4$;
- 9) $f(x) = (3x+5)^{\frac{2}{3}} + 3(3x+5)^{\frac{1}{3}} + 7$; 10) $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{5-3x}}$.

30. Fiind date funcțiile $f(x)$ și $g(x)$, să se determine funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$ și să se calculeze $(f \circ g)(3)$ și $(g \circ f)(3)$ în variantele 1) - 6) și $(f \circ g)(-1)$ și $(g \circ f)(-1)$ în variantele 7) - 12).

- 1) $f(x) = x+2$, $g(x) = x-1$; 2) $f(x) = x^2+8$, $g(x) = x-3$;
- 3) $f(x) = g(x) = x$; 4) $f(x) = x^2-1$, $g(x) = x+1$;
- 5) $f(x) = 2x^2+1$, $g(x) = x^2-1$; 6) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$;
- 7) $f(x) = x^2+2x+1$, $g(x) = -2x^2-1$; 8) $f(x) = 3x^2+2$, $g(x) = x-3$;
- 9) $f(x) = 2x^4+4x^3+1$, $g(x) = x^2+1$; 10) $f(x) = x-8$, $g(x) = |x|$;
- 11) $f(x) = |x+1| = g(x)$; 12) $f(x) = x-1$, $g(x) = x+1$.

31. Fiind date funcțiile $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ și $h(x) = x - 1$, să se calculeze:

- 1) $(f \circ g)(1)$; 2) $(g \circ f)(1)$; 3) $(h \circ f)(3)$;
- 4) $(f \circ h)(3)$; 5) $(g \circ f)(-2)$; 6) $(f \circ h)(-3)$;
- 7) $(g \circ h)(-2)$; 8) $(h \circ g)(-2)$; 9) $(f \circ h)(-1/2)$;
- 10) $(g \circ f)(-1/2)$; 11) $(f \circ h)(\sqrt{2} + 3)$; 12) $(f \circ g)(1 + \sqrt{2})$;
- 13) $(f \circ g)(c)$; 14) $(g \circ h)(c)$; 15) $(f \circ (g \circ h))(c)$;
- 16) $((f \circ g) \circ h)(c)$.

32. Determinați dacă în perechile de funcții f și g una este inversa celeilalte:

- 1) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \frac{x-1}{2}$; 2) $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$;
- 3) $f(x) = x + 4$, $g(x) = x - 4$; 4) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$;
- 5) $f(x) = 4x - 5$, $g(x) = \frac{x+5}{4}$; 6) $f(x) = x - \frac{1}{2}$, $g(x) = 2x + 1$;
- 7) $f(x) = x$, $g(x) = -x$; 8) $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = -2x - 3$.

33. Se dă valoarea funcției f . Să se calculeze valoarea funcției f^{-1} , dacă:

- 1) $f(3) = 4$; 2) $f(1/2) = 6$; 3) $f(a) = b$;
- 4) $f(a + 1) = 2$; 5) $f(m + n) = p$.

34. Să se determine f^{-1} , dacă:

- 1) $f(x) = (x + 2)/2$; 2) $f(x) = (2x + 1)/x$;
- 3) $f(x) = 1/\sqrt{x} + 2$; 4) $f(x) = (1/x)^2$;
- 5) $f(x) = (x/(x + 4))^2$; 6) $f(x) = \sqrt{x/(x - 1)}$;
- 7) $f(x) = \sqrt{(x - 1)/(x + 1)}$; 8) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x + 2} - 2}$;
- 9) $f(x) = ((x - 3)/(x + 1))^2$; 10) $f(x) = (\sqrt{x/(x + 4)} - 2)^2$.

35. Este dată funcția: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & x \geq 1, \\ 2x - 1, & x < 1. \end{cases}$$

- a) Să se demonstreze că f este bijectivă.
- b) Să se determine f^{-1} .
- c) Să se calculeze $f \circ f^{-1}$ și $f^{-1} \circ f$.

36. Fiind date funcțiile $f(x)$ și $g(x)$, să se determine funcțiile $(f \circ g)(x)$ și $(g \circ f)(x)$ ($f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$):

- 1) $f(x) = |x - 1| + 2$; $g(x) = |x - 2| + 1$;
- 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ -5x - 1, & x > 0; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 4x - 2; & x < 0, \\ 3x^2 - 2, & x > 0. \end{cases}$

37. Să se demonstreze egalitatea funcțiilor f și g :

- 1) $f, g: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1;$
 $g(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1;$
- 2) $f, g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x, g(x) = \sin \pi x;$
- 3) $f, g: [1; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max(-t^2 + 4t - 3), 1 \leq t \leq x;$
 $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & 2 < x \leq 3; \end{cases}$
- 4) $f, g: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x + 1, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$
 $g(x) = \max(-x + 1, x + 1);$
- 5) $f, g: \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x, g(x) = \sqrt{1 - x^2};$
- 6) $f, g: \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -1 + \sqrt{4 + 2x - x^2};$
 $g(x) = 1 - \sqrt{-2x - x^2};$
- 7) $f, g: \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - x, g(x) = \sqrt{4 - x^2};$
- 8) $f, g: \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4 - x^2};$
 $g(x) = 2 - \sqrt{4x - x^2};$
- 9) $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}};$
 $g(x) = \begin{cases} 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2\sqrt{x - 1}, & x > 2; \end{cases}$
- 10) $f, g: \{k\pi, 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x, g(x) = \sin 2x.$

38. Să se determine funcțiile $s = f + g, d = f - g, p = f \cdot g$ și $q = f/g$:

- 1) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 3, 5, 6\}, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=3, f(4)=6;$
 $g: \{1, 2, 3, 5\} \rightarrow \{1, 3, 4, 5\}, g(1)=1, g(2)=4, g(3)=3, g(5)=4;$
- 2) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 3, \\ -x + 3, & x > 3; \end{cases} g(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq 0, \\ x + 1, & x > 0; \end{cases}$
- 3) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1, \\ -x, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1; \end{cases} g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ x, & x \geq 0; \end{cases}$
- 4) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$
 $g: (-\infty, 5] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 5. \end{cases}$
- 5) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max(x + 1, x^2); g(x) = \min(-x, x).$

39. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{0, 1, 3, 4\}$ și funcțiile

$$f: A \rightarrow B, f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 3;$$

$$g: B \longrightarrow A, \quad g(0) = 2, \quad g(1) = 1, \quad g(3) = 4, \quad g(4) = 1.$$

Pot fi definite funcțiile $f \circ g$, $g \circ f$? Dacă da, determinați aceste funcții. Faceți diagramele lor.

40. a) Să se arate că funcția f este bijectivă.

b) Să se determine f^{-1} .

c) Să se reprezinte grafic funcțiile f și f^{-1} în același reper de coordonate.

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 6x - 2;$

2) $f: [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty), \quad f(x) = 3x + 1;$

3) $f: (-\infty, 0) \cup [2; 4] \longrightarrow (-\infty, 4], \quad f(x) = -x^2 + 4x;$

4) $f: \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, 3) \cup [4, +\infty), \quad f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0, \\ \frac{2}{3}x + 4, & x > 0; \end{cases}$

5) $f: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \cos x, & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$

41. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 6x + 2$ admite restricții inversabile pe:

a) $(-\infty, 3];$ b) $[3, +\infty);$ c) $(-\infty, 0] \cup [3, 6).$

Să se determine inversele acestor funcții și să se reprezinte grafic în același reper de coordonare.

42. Folosind proprietățile funcției caracteristice, să se demonstreze egalitățile (afirmațiile):

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

2) $(A \cup B = B \cap A) \Rightarrow (A = B);$

3) $\left. \begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array} \right\} \Rightarrow (B = C);$

4) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C);$

5) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C);$

6) $A \Delta B = (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B);$

7) $A' \Delta B' = A \Delta B;$

8) $A' \Delta B = A \Delta B';$

9) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B;$

10) $A \Delta B = A \cup B \Rightarrow A \cap B = \emptyset;$

11) $A \cap B = A \setminus B \Leftrightarrow A = \emptyset;$

12) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \emptyset;$

13) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B;$

14) $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B.$

CAPITOLUL III

Elemente de combinatorică

3.1. Permutări. Aranjamente. Combinări. Binomul lui Newton

Pentru rezolvarea multor probleme practice (și nu numai) este necesar:

- 1) de a putea evalua numărul diferitelor combinații, compuse cu elementele unei mulțimi sau cu elementele a mai multor mulțimi;
- 2) de a alege dintr-o mulțime de obiecte submulțimi (a face selecții) de elemente care posedă anumite proprietăți;
- 3) de a dispune elementele unei sau ale mai multor mulțimi într-o anumită ordine etc.

Domeniul matematicii care studiază probleme de felul acesta și metodele de rezolvare a lor se numește combinatorică. Altfel spus, combinatorica studiază unele operații asupra mulțimilor finite. Aceste operații conduc la noțiunile de permutări, aranjamente și combinații.

Fie $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime finită care are n elemente. Mulțimea M se numește **ordonată**, dacă fiecare element al său se asociază cu un anumit număr de la 1 la n , numit rangul elementului, astfel încât elemente diferite ale lui M se asociază cu numere diferite.

Definiția 1. *Toate mulțimile ordonate care pot fi formate cu n elemente ale mulțimii date M ($n(M) = n$) se numesc **permutări de n elemente***.

Numărul tuturor permutărilor de n elemente se notează cu simbolul P_n și se calculează conform formulei

$$P_n = n! \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Prin definiție, se consideră $P_0 = 0! = 1 = 1! = P_1$.

Definiția 2. Toate submulțimile ordonate care conțin m elemente ale mulțimii M cu n elemente se numesc **aranjamente** de n elemente luate câte m .

Numărul tuturor aranjamentelor de n elemente luate câte m se notează cu simbolul A_n^m și se calculează conform formulei

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1); \quad 0 \leq m \leq n; \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Definiția 3. Toate submulțimile care conțin m elemente ale mulțimii M cu n elemente se numesc **combinări** de n elemente luate câte m .

Numărul tuturor combinațiilor de n elemente luate câte m se notează cu simbolul C_n^m și se calculează conform formulei

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}}, \quad (3)$$

unde $m, n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq m \leq n$.

Remarcă. În toate submulțimile din definițiile 1–3, fiecare element al mulțimii inițiale M figurează o singură dată.

Paralel cu combinațiile în care fiecare din cele n elemente diferite ale unei mulțimi participă numai o singură dată, pot fi considerate și combinații cu repetiții, adică combinații în care unul și același element poate participa mai mult decât o singură dată.

Fie date n grupe de elemente. Fiecare grupă conține câteva elemente de același fel.

Definiția 1'. Permutări de n elemente fiecare din ele conținând α_1 elemente a_{i_1} , α_2 elemente a_{i_2} , ..., α_k elemente a_{i_k} , unde $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$, se numesc **permutări de n elemente cu repetiții**.

Numărul tuturor permutărilor cu repetiții se notează cu simbolul $\overline{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ și se calculează conform formulei

$$\overline{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_k!} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_k!}. \quad (4)$$

Definiția 2'. Aranjamentele de n elemente fiecare din ele conținând m elemente, iar unul și același element se poate repeta în fiecare aranjament de un număr arbitrar de ori, dar nu mai mult de m ori, se

numesc **aranjamente** de n elemente luate câte m cu **repetiții**.

Numărul tuturor aranjamentelor cu repetiții de n elemente luate câte m în fiecare se notează cu simbolul $\overline{A}_n^m$ și se calculează conform formulei

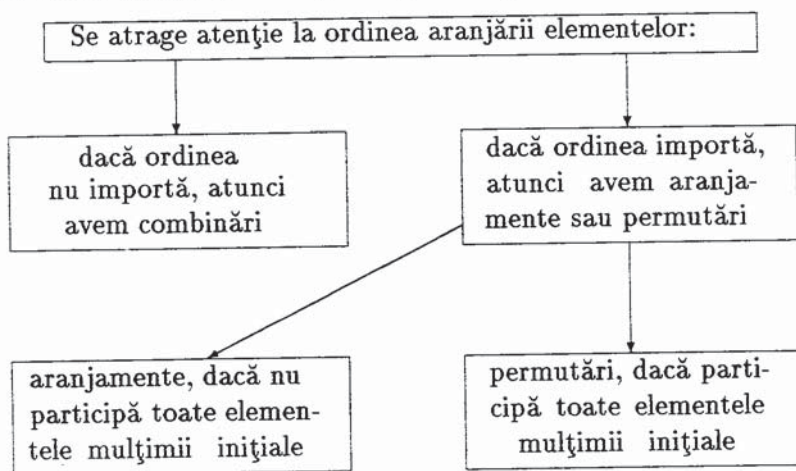
$$\overline{A}_n^m = n^m, \quad n, m \in \mathbb{N}^*. \quad (5)$$

Definiția 3'. *Combinări de n elemente fiecare din ele conținând m elemente, iar unul și același element se poate repeta de mai multe ori, dar nu mai mult de m ori, se numesc **combinări** de n elemente luate câte m cu **repetiții**.*

Numărul tuturor combinărilor cu repetiții se notează cu simbolul $\overline{C}_n^m$ și se calculează conform formulei

$$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!}, \quad n, m \in \mathbb{N}^*. \quad (6)$$

În procesul de rezolvare a problemelor de combinatorică este important de a stabili mai întâi tipul (forma) combinației. Una din regulile de stabilire a tipului combinației ar putea fi și următorul tablou



Deseori este utilă folosirea următoarelor două reguli:

Regula sumei. Dacă obiectul A poate fi ales în m moduri, iar obiectul B în n moduri, atunci alegerea "sau A , sau B " poate fi efectuată în $m + n$ moduri.

Regula înmulțirii. Dacă obiectul A poate fi ales în m moduri și după fiecare alegere de acest fel obiectul B poate fi ales, la rândul

său, în n moduri, atunci alegerea "A și B" în această ordine poate fi efectuată în $m \cdot n$ moduri.

Vom menționa, de asemenea, câteva proprietăți ale combinărilor, și anume:

$$\text{I. } C_n^m = C_n^{n-m}.$$

$$\text{II. } C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m.$$

$$\text{III. } C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$$

$$(C_n^{n-k} = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-3}^{n-k-2} + \dots + C_{k-1}^0).$$

$$\text{IV. } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Formula

$$(x+a)^n = C_n^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot a + C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot x \cdot a^{n-1} + C_n^n \cdot a^n \quad (7)$$

se numește formula binomului lui Newton ($n \in \mathbb{N}^*$).

Coeficienții $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ din formula binomului lui Newton se numesc coeficienți binomiali; ei posedă următoarele proprietăți:

V. Coeficienții binomiali din dezvoltarea (7), egal depărtați de termenii extremi ai dezvoltării, sunt egali între ei.

VI a. Suma tuturor coeficienților binomiali este egală cu 2^n .

VI b. Suma coeficienților binomiali care se află pe locuri pare este egală cu suma coeficienților binomiali care se află pe locuri impare.

VII. Dacă n este un număr par (adică $n = 2k$), atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării (adică C_n^k) este cel mai mare. Dacă n este impar (adică $n = 2k + 1$), atunci coeficienții binomiali ai celor doi termeni de la mijloc sunt egali între ei (adică $C_n^k = C_n^{k+1}$) și sunt cei mai mari.

VIII. Termenul $C_n^k x^{n-k} a^k$, adică al $(k+1)$ -lea termen din egalitatea (7), se numește termenul de rang $k+1$ (termenul general al dezvoltării) și se notează cu T_{k+1} . Așadar,

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

IX. Coeficientul termenului de rangul $k+1$ în dezvoltarea binomului lui Newton este egal cu produsul coeficientului termenului de rangul k înmulțit cu exponentul lui x în acest termen și împărțit la k , adică

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}. \quad (9)$$

$$X. \quad C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \cdot C_n^k. \quad (10)$$

3.2. Probleme rezolvate

1. În câte moduri se pot așeza pe un raft patru cărți?

Soluție. Cum în problemă ordinea are importanță și, în plus, participă toate elementele mulțimii date, este vorba despre permutări. Deci

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Răspuns: 24.

2. Un tren de persoane are zece vagoane. În câte moduri pot fi așezate vagoanele pentru formarea trenului?

Soluție. Ca și în problema precedentă, este vorba de permutări de 10 elemente ale mulțimii care are 10 elemente. Atunci numărul modurilor în care poate fi format trenul este

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

Răspuns: 3 628 800.

3. În câte moduri șapte elevi pot fi așezați în șapte bănci, astfel încât toate băncile să fie ocupate?

Soluție. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040.$

Răspuns: 5 040.

4. Câte numere de telefon a câte șase cifre pot fi formate:

- 1) cifra participă în numărul de telefon numai o singură dată;
 - 2) cifra participă mai mult de o singură dată?
- (Numărul de telefon poate începe și cu cifra 0.)

Soluție. În total avem 10 cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cum numărul de telefon poate începe și cu cifra 0, avem:

- 1) aranjamente din 10 cifre luate câte 6, adică

$$A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200;$$

- 2) deoarece cifra în număr se poate repeta, avem aranjamente cu repetiții, adică

$$\overline{A_{10}^6} = 10^6 = 1\,000\,000.$$

Răspuns: 1) 151 200; 2) 1 000 000.

5. Echipa de volei este formată din 6 sportivi. Câte echipe de volei poate forma un antrenor având 10 voleibaliști la dispoziție?

Soluție. Deoarece la formarea echipei antrenorul este preocupat numai de componența acesteia, este suficient să determinăm numărul combinărilor de 10 elemente luate câte 6, adică

$$C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Răspuns: 210.

6. Câte numere de câte cinci cifre pot fi formate cu cifrele 0 și 1?

Soluție. Cum cifrele se repetă și ordinea are importanță, este vorba de aranjamente cu repetiții. Aici $m = 5$, $n = 2$.

Din cifrele 0 și 1 pot fi formate $\overline{A_2^5} = 2^5$ numere a câte cinci cifre. Însă trebuie de luat în considerație că numărul nu poate începe cu cifra zero. Deci din numărul $\overline{A_2^5}$ trebuie scăzut numărul acelor numere care încep cu zero. Numere de felul acesta sunt $\overline{A_2^4}$. Prin urmare, numărul căutat este

$$\overline{A_2^5} - \overline{A_2^4} = 2^5 - 2^4 = 16.$$

Răspuns: 16.

7. Câte numere de câte trei cifre pot fi formate cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, dacă cifrele se pot repeta?

Soluție. Cum cifrele se repetă, evident este vorba despre aranjamente cu repetiții de 5 cifre luate câte trei. Prin urmare, pot fi formate $\overline{A_5^3} = 5^3$ numere a câte trei cifre.

Răspuns: 125.

8. Din 10 trandafiri și 8 gheorghine trebuie să se formeze buchete care conțin 2 trandafiri și 3 gheorghine. Câte buchete de felul acesta pot fi formate?

Soluție. Doi trandafiri din cei 10 care îi avem pot fi aleși în C_{10}^2 moduri, iar trei gheorghine din 8 pot fi luate în C_8^3 moduri. Aplicând regula înmulțirii, avem: numărul total de buchete care pot fi formate este $C_{10}^2 \cdot C_8^3 = 1890$.

Răspuns: 1890.

9. La o serată dansantă participă 12 domnișoare și 15 cavaleri. În câte moduri pot fi alese patru perechi pentru a dansa?

Soluție. Cele 12 domnișoare pot fi repartizate în grupuri a câte patru persoane în C_{12}^4 moduri, iar cei 15 cavaleri – în C_{15}^4 moduri. Deoarece în fiecare grup format de domnișoare (sau de cavaleri) ordinea are importanță, fiecare din acest grup poate fi ordonat în P_4 moduri. Ca rezultat (aplicăm regula înmulțirii), vom avea $C_{12}^4 \cdot P_4 \cdot C_{15}^4 = A_{12}^4 \cdot C_{15}^4 = C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = 16\,216\,200$.

Răspuns: 16 216 200.

10. Pentru efectuarea unui zbor cosmic pe Marte este necesar de a forma echipajul navei cosmice în următoarea componență: căpitanul navei, primul adjunct al căpitanului, al doilea adjunct al căpitanului, doi ingineri de bord și un medic. Tripletul de comandă poate fi selectat din cei 25 de piloți care se pregătesc de zbor, doi ingineri de bord din numărul de 20 de specialiști care cunosc la perfecție construcția corabiei cosmice, iar medicul – din numărul de 8 medici.

În câte moduri poate fi format echipajul navei cosmice?

Soluție. Alegând căpitanul și adjuncții săi, este important de determinat cine din piloți ar face față mai bine unor funcții oarecare de dirijare a navei. Deci este important și modul de distribuire a funcțiilor între membrii tripletului format. Așadar, tripletul de dirijare poate fi format în A_{25}^3 moduri.

Funcțiile ambilor ingineri de bord sunt cam aceleași. Ei pot îndeplini aceste funcții cosecutiv. Deci perechea de ingineri poate fi formată în C_{20}^2 moduri. Referitor la medic – situația este aceeași, adică medicul poate fi ales în C_8^1 moduri.

Utilizând regula înmulțirii, avem: fiecărui triplet de dirijare i se poate asocia un cuplu de ingineri în C_{20}^2 moduri. În total vom avea $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2$ cvintete. Fiecărui cvintet i se asociază un medic în C_8^1 moduri. Ca rezultat, echipajul navei cosmice poate fi format în $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1$ moduri, sau

$$A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1 = 20\,976\,000.$$

Răspuns: 20 976 000.

11. În câte moduri diferite pot fi alese cinci prăjituri de același fel sau diferite într-o cofetărie unde există 11 feluri diferite de prăjituri?

Soluție. Cele cinci prăjituri pot fi toate de un fel sau patru de un fel și una de alt fel, sau trei de un fel și două de altfel, ... etc. sau

toate de feluri diferite.

Numărul căutat al seturilor posibile a câte cinci prăjituri de cele 11 feluri este egal cu numărul combinațiilor cu repetiții de 11 elemente luate câte cinci, adică

$$\overline{C_{11}^5} = \frac{(11 + 5 - 1)!}{5!(11 - 1)!} = \frac{15!}{5!10!} = 3\,003.$$

Răspuns: 3 003.

12. Într-un grup de 10 sportivi sunt doi vâslași, trei înotători, iar ceilalți sunt atleți. Trebuie de format o echipă din 6 persoane pentru competițiile care se apropie în așa mod, încât în echipă să fie cel puțin câte un reprezentant al celor trei feluri de sport nominalizate.

În câte moduri poate fi formată această echipă?

Soluție. a) În echipă poate fi un vâslaș, un înotător și patru atleți. Vâslașul poate fi ales în C_2^1 moduri, înotătorul în C_3^1 moduri, iar atleții – în C_5^4 moduri. Utilizând regula înmulțirii, avem $C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^4$ moduri.

b) În echipă poate fi un vâslaș, doi înotători și trei atleți. Conform raționamentelor anterioare, numărul echipelor de componența aceasta va fi $C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3$.

c) În echipă poate fi un vâslaș, trei înotători și doi atleți. Numărul echipelor în cazul acesta va fi $C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^2$.

d) În echipă pot fi doi vâslași, un înotător și trei atleți. Vom avea $C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3$ de aceste echipe.

e) În echipă pot fi doi vâslași, doi înotători și doi atleți. Numărul de echipe va fi $C_2^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2$.

f) În echipă pot fi doi vâslași, trei înotători și un atlet. Echipe vor fi în număr de $C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1$.

Utilizând regula sumei, numărul total de echipe care pot fi formate este

$$C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^4 + C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 + C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^2 + C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3 + C_2^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2 + C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1 = 175.$$

Răspuns: 175.

13. Sunt date $k = 15$ litere mari, $m = 10$ vocale și $n = 11$ consoane (în total $k + m + n = 36$ litere). Câte cuvinte diferite pot fi formate din aceste litere, dacă în fiecare cuvânt pe primul loc trebuie să fie o literă mare, printre celelalte litere trebuie să fie $\mu = 4$ vocale diferite (din numărul celor $m = 10$ date) și $\nu = 6$ consoane diferite (din cele $n = 11$ date).

Soluție. Alegem o literă mare. Această alegere poate fi efectuată în k moduri. Apoi din m vocale alegem μ litere. Acest lucru poate fi făcut în C_m^μ moduri. În sfârșit, alegem ν consoane, ceea ce poate fi realizat în C_n^ν moduri. Utilizând regula înmulțirii, alegerea literelor necesare pentru formarea cuvântului poate fi efectuată în $k \cdot C_m^\mu \cdot C_n^\nu$ moduri.

După ce am plasat litera mare pe primul loc, cu celelalte $\mu + \nu$ litere pot fi formate $(\mu + \nu)!$ permutări. Fiecare permutare de felul acesta furnizează un cuvânt nou. Așadar, în total pot fi formate $k \cdot C_m^\mu \cdot C_n^\nu (\mu + \nu)!$ cuvinte diferite, adică $15 \cdot C_{10}^4 C_{11}^6 \cdot 10!$

Răspuns: $15 \cdot C_{10}^4 C_{11}^6 \cdot 10!$

14. Într-o alimentară sunt trei feluri de bomboane. Bomboanele sunt ambalate în trei cutii diferite, pentru fiecare denumire cutia sa. În câte moduri poate fi comandat un set de cinci cutii?

Soluție (vezi problema 11). $\overline{C}_3^5 = \frac{(3+5-1)!}{5! \cdot (3-1)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$

Răspuns: 21.

15. Pentru a forma garda de onoare de 10 persoane, sunt invitați ofițeri ai trupelor: de infanterie, aviație, grăniceri, artilerie; ofițeri ai flotei maritime și ai trupelor de rachete.

În câte moduri poate fi aleasă componența gărzii de onoare?

Soluție. Avem 6 categorii de ofițeri. Repetând raționamentele din problema 10, avem de calculat combinații cu repetiții de 6 elemente luate câte 10, adică

$$\overline{C}_6^{10} = \frac{(6+10-1)!}{(6-1)! \cdot 10!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3\,003.$$

Răspuns: 3 003.

16. Pe un raft sunt $m + n$ cărți diferite. Printre ele m sunt cu coperte albastre, iar n cu coperte galbene. Cărțile sunt permutate în toate modurile posibile. Câte poziții diferite ale cărților sunt, dacă:

- cărțile în coperte albastre ocupă primele m locuri;
- cărțile în coperte albastre stau alături?

Soluție. a) Cărțile în coperte albastre pot fi plasate pe primele m locuri în $P_m = m!$ moduri. Cu fiecare repartizare de așa fel, cărțile în coperte galbene pot fi repartizate în $P_n = n!$ moduri. Utilizând regula

înmulțirii, avem în total $m! \cdot n!$ poziții în care cărțile în coperte albastre ocupă primele m locuri.

b) Fie cărțile în coperte albastre aranjate alături. Atunci după ele pe raft pot fi sau n cărți în coperte galbene, sau $n-1$, sau $n-2, \dots$, sau nici o carte în coperte galbene. Așadar, putem plasa cărțile în coperte albastre, astfel încât ele să urmeze una după alta în $n+1$ moduri. În fiecare din aceste poziții, cărțile în coperte galbene pot fi permutate în orice mod, de asemenea și cărțile în coperte albastre pot fi permutate în orice mod. Drept rezultat, vom avea $m! \cdot n! \cdot (n+1)$ poziții diferite ale cărților.

Răspuns: a) $m! \cdot n!$; b) $m! \cdot n! \cdot (n+1)$.

17. Aflați termenul al patrulea al dezvoltării binomului lui Newton $(2x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^8$.

Soluție. Conform formulei (9), termenul de rangul 4 are forma

$$T_4 = C_8^3 (2x\sqrt{x})^{8-3} \cdot (-x^{1/3})^3 = -C_8^3 \cdot 2^5 \cdot x^{15/2} \cdot x = \\ = -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^5 \cdot x^{17/2} = -256 \cdot 7 \cdot x^{17/2} = -1792 \cdot x^{17/2}.$$

Răspuns: $-1792 \cdot x^{17/2}$.

18. Aflați coeficientul cel mai mare în dezvoltarea binomului

$$[(1+x)(1/x-1)]^m.$$

$$\text{Soluție. } \left[(1+x) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right]^m = \left(\frac{(1+x)(1-x)}{x} \right)^m = \frac{(1-x^2)^m}{x^m} = \\ = x^{-m} \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^k \cdot x^{2k}.$$

Dacă m este număr par, adică $m = 2s$, $s \in \mathbb{N}^*$, atunci dezvoltarea binomului conține $2s+1$ termeni, iar în baza proprietății VII, coeficientul C_{2s}^s este cel mai mare.

Dacă m este număr impar, adică $m = 2s+1$, $s \in \mathbb{N}$, în baza aceleiași proprietăți VII, dezvoltarea binomului conține doi termeni care au coeficienții cei mai mari $C_{2s+1}^s, C_{2s+1}^{s+1}$.

Răspuns: C_{2s}^s , dacă m este număr par; $C_{2s+1}^s, C_{2s+1}^{s+1}$, dacă m este număr impar.

19. Aflați termenii care nu-l conțin pe x în dezvoltarea binomului

$$[(1+x)(1+1/x)]^n.$$

Soluție. $\left[(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$. Termenul de rangul $k+1$ în dezvoltarea acestui binom are forma

$$T_{k+1} = \frac{1}{x^n} C_{2n}^k x^k = C_{2n}^k \cdot x^{k-n}.$$

Acest termen nu conține x numai dacă $k-n=0 \Leftrightarrow k=n$. Deci termenul care nu-l conține pe x este T_{n+1} .

Răspuns: T_{n+1} .

20. În dezvoltarea binomului

$$(a\sqrt[5]{a/3} - b/\sqrt[7]{a^3})^n$$

aflați termenul care conține pe a la puterea a treia, dacă suma coeficienților binomiali care se află pe locuri impare în dezvoltarea binomului este egală cu 2048.

Soluție. Vom afla mai întâi exponentul n . În baza proprietății VI a, suma coeficienților binomiali este 2^n . Deoarece suma coeficienților care se află pe locuri impare este egală cu 2048, iar în baza proprietății VI b, ea este egală cu suma coeficienților care se află pe locuri pare în dezvoltarea respectivă, avem

$$2048 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{11} = 2^{n-1} \Leftrightarrow n = 12.$$

Așadar, gradul binomului este 12. Termenul de rangul $k+1$ ia forma

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{12}^k (a\sqrt[5]{a/3})^{12-k} \cdot (-1)^k \cdot (b/\sqrt[7]{a^3})^k = \\ &= C_{12}^k \cdot (-1)^k / (3^{(12-k)15}) \cdot (a^{6/5})^{12-k} \cdot a^{-3k/7} \cdot b^k. \end{aligned}$$

Ținând cont de cerințele problemei, avem

$$\begin{aligned} a^{\frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{7}} &= a^3 \Leftrightarrow \frac{72-6k}{5} - \frac{3k}{7} = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 24 \cdot 7 - 2 \cdot 7k - 5k &= 35 \Leftrightarrow 19k = 133 \Leftrightarrow k = 7, \end{aligned}$$

iar

$$T_8 = C_{12}^7 \cdot a^3 \cdot 3^{-1} \cdot (-1)^7 \cdot b^7 = -264a^3b^7.$$

Răspuns: $-264a^3b^7$.

21. Pentru care valoare a lui n coeficienții binomiali ai termenilor al doilea, al treilea și al patrulea din dezvoltarea binomului $(x+y)^n$ formează o progresie aritmetică?

Soluție. În baza formulei (8), avem

$$T_2 = C_n^1 x^{n-1} y, \quad T_3 = C_n^2 x^{n-2} y^2, \quad T_4 = C_n^3 x^{n-3} y^3,$$

iar din condițiile problemei rezultă relația

$$C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(6+(n-1)(n-2)-6(n-1)) = 0 \stackrel{n \in \mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} n^2 - 9n + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2, \\ n = 7. \end{cases}$$

Condițiile problemei sunt verificate de valoarea $n = 7$.

Răspuns: $n = 7$.

22. Demonstrați că diferența coeficienților lui x^{k+1} și x^k în dezvoltarea binomului $(1+x)^{n+1}$ este egală cu diferența coeficienților lui x^{k+1} și x^{k-1} în dezvoltarea binomului $(1+x)^n$.

Soluție. Coeficienții lui x^{k+1} și x^k în dezvoltarea binomului $(1+x)^{n+1}$ sunt C_{n+1}^{k+1} și C_{n+1}^k , respectiv. Evaluăm diferența

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{k+1} - C_{n+1}^k &\stackrel{(9)}{=} \frac{(n+1)-k}{k+1} C_{n+1}^k - C_{n+1}^k = \left(\frac{n+1-k}{k+1} - 1 \right) \cdot C_{n+1}^k = \\ &= \frac{n+1-k-k-1}{k+1} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n-2k) \cdot (n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-k)!}. \quad (*) \end{aligned}$$

În dezvoltarea binomului $(1+x)^n$, coeficienții lui x^{k+1} și x^{k-1} sunt C_n^{k+1} și C_n^{k-1} , respectiv. Evaluăm diferența

$$\begin{aligned} C_n^{k+1} - C_n^{k-1} &\stackrel{(9)}{=} \frac{n-k}{k+1} C_n^k - C_n^{k-1} \stackrel{(9)}{=} \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1} - C_n^{k-1} = \\ &= \left(\frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k} - 1 \right) \cdot C_n^{k-1} = \\ &= \frac{(n-k)^2 + (n-k) - k^2 - k}{(k+1)k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)(n-2k) \cdot n!}{(k+1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-2k) \cdot (n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!}. \quad (**) \end{aligned}$$

Cum membrii din dreapta în (*) și (**) sunt egali, rezultă egalitatea membrilor din stânga, adică

$$C_{n+1}^{k+1} - C_{n+1}^k = C_n^{k+1} - C_n^{k-1},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

23. Comparând coeficienții lui x în ambii membri ai egalității

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n},$$

demonstrați că

$$C_n^k C_m^0 + C_n^{k-1} C_m^1 + \dots + C_n^0 C_m^k = C_{m+n}^k. \quad (A)$$

Soluție. $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^k x^k + \dots + C_m^{m-1} x^{m-1} + x^m) \cdot (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n).$

În membrul drept al acestei egalități, coeficientul lui x^k este

$C_m^0 \cdot C_n^k + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^2 \cdot C_n^{k-2} + \dots + C_m^{k-1} \cdot C_n^1 + C_m^k \cdot C_n^0$,
iar în dezvoltarea binomului $(1+x)^{n+m}$, termenul de rangul $k+1$ are
forma

$$T_{k+1} = C_{m+n}^k \cdot x^k.$$

Cum polinoamele $(1+x)^m \cdot (1+x)^n$ și $(1+x)^{m+n}$ sunt egale și au același grad, rezultă egalitatea coeficienților pe lângă aceleași puteri ale lui x , or aceasta și finalizează demonstrația egalității (A).

24. Demonstrați egalitatea

$$\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \dots + \frac{C_n^n}{1} = \frac{2}{n+1} \left(2^n - \frac{1}{2} \right).$$

Soluție. Fie $\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \dots + \frac{C_n^n}{1} = A \Leftrightarrow \frac{C_n^n}{n+1} + \frac{C_n^{n-1}}{n} +$
 $\frac{C_n^{n-2}}{n-1} + \dots + \frac{C_n^0}{1} = A.$

Multiplicăm ambii membri ai ultimei egalități cu $(n+1)$. Obținem
 $\frac{n+1}{n+1} C_n^n + \frac{n+1}{n} C_n^{n-1} + \frac{n+1}{n-1} C_n^{n-2} + \dots + \frac{n+1}{1} C_n^0 = A(n+1) \stackrel{(10)}{\Leftrightarrow}$
 $\Leftrightarrow C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1} = A(n+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1} = C_{n+1}^0 + A(n+1) \stackrel{IV}{\Leftrightarrow}$
 $\Leftrightarrow 2^{n+1} = C_{n+1}^0 + A(n+1) \Leftrightarrow 2^{n+1} - C_{n+1}^0 = A(n+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow A = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \Leftrightarrow A = \frac{2}{n+1} \cdot \left(2^n - \frac{1}{2} \right).$

Revenind la expresia inițială, avem

$$\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \dots + \frac{C_n^n}{1} = \frac{2}{n+1} \left(2^n - \frac{1}{2} \right),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

25. Demonstrați că

$$nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0.$$

Soluție. Scriem dezvoltarea binomului $(x-1)^n$:

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} +$$

 $+ \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x + (-1) C_n^n. \quad (A)$

Derivăm ambii membri ai egalității (A) în raport cu x . Obținem

$$n(x-1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + (n-2)C_n^2 x^{n-3} -$$

 $-(n-3)C_n^3 x^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}. \quad (**)$

Punem în $(**)$ $x = 1$. Atunci
 $0 = nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}$,
 ceea ce trebuia demonstrat.

(Alte metode vezi pag. 54 în [2].)

26. Demonstrați că egalitatea

$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + \dots - 10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = (81)^n$
 este adevărată.

Soluție. Se observă că expresia

$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + \dots - 10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n}$
 reprezintă dezvoltarea binomului $(1 - 10)^{2n} = 9^{2n} = (81)^n$, ceea ce
 trebuia demonstrat.

27. Aduceți expresia $P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n$ la o formă mai simplă.

Soluție. Vom efectua transformările de rigoare aplicând metoda
 inducției matematice. Fie

$$P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n = A_n. \quad (*)$$

Pentru:

$n = 1$, avem $P_1 = A_1 \Leftrightarrow A_1 = 1$;

$n = 2$, avem $P_1 + 2P_2 = A_2 \Leftrightarrow 1 + 2 \cdot 2! = A_2 \Leftrightarrow 5 = A_2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3! - 1 = A_2 \Leftrightarrow P_3 - 1 = A_2$.

$n = 3$, avem $P_1 + 2P_2 + 3P_3 = A_3 \Leftrightarrow A_2 + 3P_3 = A_3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3! - 1 + 3 \cdot 3! = A_3 \Leftrightarrow 3!(1 + 3) - 1 = A_3 \Leftrightarrow 4! - 1 =$
 $= A_3 \Leftrightarrow P_4 - 1 = A_3$.

Presupunem că pentru $n = k$ egalitatea $(*)$ ia forma

$$P_1 + 2P_2 + \dots + kP_k = (k+1)! - 1. \quad (**)$$

Calculăm valoarea expresiei $(*)$ pentru $n = k+1$. Avem

$$P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + kP_k + (k+1)P_{k+1} \stackrel{(**)}{=} (k+1)! - 1 + (k+1)P_{k+1} =$$

$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1 + k+1) - 1 =$$

$$= (k+2)! - 1 = P_{k+2} - 1.$$

În baza principiului inducției matematice, ajungem la concluzia că

$$P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n = (n+1)! - 1 = P_{n+1} - 1.$$

Răspuns: $P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n = P_{n+1} - 1$.

28. Să se arate că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, $m! \cdot n!$ divide $(m+n)!$

Soluție. Conform definiției 3, $\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!} = C_{m+n}^n$ este numărul submulțimilor care au n elemente ale unei mulțimi cu $(m+n)$ elemente, adică C_{m+n}^n este un număr natural. Prin urmare, $\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ este număr întreg, or aceasta și arată că $m! \cdot n!$ divide $(m+n)!$

29. Să se deducă egalitatea

$$(n-k)C_n^{k+1} - (k+1)C_n^k = (n-2k-1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Soluție. Utilizăm proprietatea X. Avem

$$C_n^{k+1} = (n-k)/(k+1)C_{n+1}^{k+1}, \quad C_n^k = (k+1)/(n+1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Ca rezultat,

$$\begin{aligned} (n-k)C_n^{k+1} - (k+1)C_n^k &= \frac{(n-k)^2}{n+1}C_{n+1}^{k+1} - \frac{(k+1)^2}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \\ &= \frac{(n-k)^2 - (k+1)^2}{n+1} \cdot C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n-k-k-1)(n-k+k+1)}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \\ &= \frac{(n-2k-1)(n+1)}{n+1} \cdot C_{n+1}^{k+1} = (n-2k-1) \cdot C_{n+1}^{k+1}, \text{ c.t.d.} \end{aligned}$$

30. Să se calculeze suma

$$S_n = \frac{n+2}{1!+2!+3!} + \frac{n+2}{2!+3!+4!} + \dots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}.$$

Soluție. Se observă că termenul a_n al acestei sume poate fi transformat în modul următor

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} = \frac{n+2}{n!(1+n+1+(n+1)(n+2))} = \\ &= \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{n!(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Atunci suma S_n ia forma

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!} + \dots - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \\ &\quad - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Răspuns: $S_n = 1/2 - 1/(n+2)!$

31. Rezolvați ecuația

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

Soluție. $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + 6 \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + 6 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 9x^2 - 14x \xrightarrow{x \geq 0} 1 + 3x - 3 + x^2 -$$

$$-3x + 2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 7. \end{cases}$$

Deoarece C_x^3 are sens numai pentru $x \geq 3$, rezultă că soluție a ecuației inițiale este $x = 7$.

Răspuns: $x = 7$.

32. Rezolvați ecuația

$$C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1).$$

Soluție. $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-2)!((x+1)-(x-2))!} + 2 \cdot \frac{(x-1)!}{(x-1-3)!} = 7(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)!(x-1)x(x+1)}{(x-2)! \cdot 3!} + 2 \cdot \frac{(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)}{(x-4)! \cdot 3!} = 7(x-1) \xrightarrow{x \geq 4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x(x+1) + 2(x-3)(x-2)(x-1) - 42(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 =$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 5.$$

Răspuns: $x = 5$.

33. Rezolvați ecuația

$$(A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y}) / P_{x-1} = 72. \quad (A)$$

Soluție. Deoarece $A_{x+1}^{y+1} = (x+1)! / (x-y)!$, $P_{x-y} = (x-y)!$, $P_{x-1} = (x-1)!$, avem (A) $\Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-y)!} \cdot \frac{(x-y)!}{(x-1)!} = 72 \xrightarrow{0 \leq y \leq x} x(x+1) =$

$$= 72 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ x = -9 \end{cases} \xrightarrow{x \in \mathbb{N}^*} x = 8.$$

Cum $y \in \mathbb{N}$ și $y \leq x$, avem $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Răspuns: $x = 8$; $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

34. Să se determine valorile lui x care verifică egalitatea

$$(x+2)! = -15(x-1)! + 5[x! + (x+1)!].$$

Soluție. $(x+2)! = -15(x-1)! + 5[x! + (x+1)!] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)!x(x+1)(x+2) = -15(x-1)! + 5[(x-1)!x + (x-1)!x(x+1)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)!x(x+1)(x+2) = (x-1)![-15 + 5x + 5x(x+1)] \xrightarrow{x \geq 1}$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = -15 + 5x^2 + 10x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3$, deoarece soluțiile ecuației $x^2 + x - 5 = 0$ sunt numere iraționale.

Răspuns: $x = 3$.

35. Să se rezolve ecuația $A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! = 90(x-1)!$

Soluție. $A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! = 90(x-1)! \Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-n)!} \cdot (x-n)! = 90(x-1)! \Leftrightarrow \sum_{0 \leq n \leq x} (x-1)!x(x+1) = 90(x-1)! \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ x = -10 \end{cases} \Rightarrow x = 9$. Atunci $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Răspuns: $x = 9$, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

36. Rezolvați sistemul de ecuații

$$\begin{cases} A_y^x: P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720. \end{cases} \quad (B)$$

Soluție. Din condițiile problemei, avem $x, y \in \mathbb{N}$ cu $x \geq 1$ și $x \leq y$. În baza formulelor (1) – (3), avem

$$\begin{aligned} (B) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y!}{(y-x)!} \cdot \frac{1}{(x-1)!} + \frac{y!}{(y-x)!x!} = 126, \\ (x+1)! = 720 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y!(x+1)}{(y-x)! \cdot x!} = 126, \\ (x+1)! = 6! \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y! \cdot 6}{(y-x)! \cdot 5!} = 126, \\ x+1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y = 5! \cdot 21, \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^5 - 10y^4 + 35y^3 - 50y^2 + 24y - 2520 = 0, \\ x = 5. \end{cases} \quad (*)$$

Divizori ai termenului liber în (*) sunt numerele

$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 7; \pm 8; \pm 9; \pm 10; \dots$

Utilizăm schema lui Horner și teorema Bezout pentru a selecta numerele care sunt soluții ale ecuației (*). Cum $y \in \mathbb{N}$, vom verifica numai numerele naturale. Se verifică: numerele $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nu sunt soluții ale ecuației (*).

Verificăm $y = 7$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -10 & 35 & -50 & 24 & -2520 \\ 7 & 1 & -3 & 14 & 48 & 360 & 0 \end{array}$$

Deci

(*) $\Leftrightarrow (y-7)(y^4 - 3y^3 + 14y^2 + 48y + 360) = 0 \Leftrightarrow y = 7$,
deoarece pentru $y > 7$, expresia $y^4 - 3y^3 + 14y^2 + 48y + 360 > 0$.
Așadar, soluția sistemului (B) este perechea (5, 7).

Răspuns: $\{(5, 7)\}$.

37. Aflați x și y , dacă

$$C_x^{y-1} : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3:5:5. \quad (C)$$

Soluție. Vom aduce mai întâi la o formă mai simplă expresia

$$\begin{aligned} C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1} &= (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) + (C_{x-2}^{y-1} + C_{x-2}^{y-2}) \stackrel{II}{=} \\ &= C_{x-1}^y + C_{x-1}^{y-1} \stackrel{II}{=} C_x^y. \end{aligned}$$

Ca rezultat, sistemul (C) ia forma

$$C_x^{y-1} : C_x^y : C_x^{y+1} = 3:5:5 \Leftrightarrow \begin{cases} C_x^{y-1} : C_x^y = 3:5, \\ C_x^y : C_x^{y+1} = 5:5, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} : \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{3}{5}, \\ \frac{x!}{y!(x-y)!} : \frac{x!}{(x-y-1)!(y+1)!} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y \cancel{\downarrow} (x-y) \cancel{\downarrow}}{(\overline{y-1}) \cancel{\downarrow} (x-y+1) \cancel{\downarrow}} = \frac{3}{5}, \\ \frac{(\overline{x-y-1}) \cancel{\downarrow} (y+1) \cancel{\downarrow}}{y \cancel{\downarrow} \cdot (x-y) \cancel{\downarrow}} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 3x - 3y + 3, \\ y + 1 = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 6y + 3 + 3, \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 7. \end{cases}$$

Răspuns: $\{(7, 3)\}$.

38. Să se determine valorile lui x , astfel încât

$$(x(x+1)!)/(2 \cdot x!) \leq 2x + 9.$$

Soluție. Din enunț rezultă $x \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\frac{x(x+1)!}{2 \cdot x!} \leq 2x + 9 \Leftrightarrow \frac{x \cdot x!(x+1)}{2 \cdot x!} \leq 2x + 9 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 4x + 18 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-6) \leq 0 \xLeftrightarrow{x \in \mathbb{N}} x-6 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$
 și $x \in \mathbb{N}$. Deci $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Răspuns: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

39. Să se găsească valorile lui x care verifică inecuația

$$x \cdot C_{x-1}^{x-3} - 7 \cdot C_{x-2}^{x-3} \leq 8(x-2). \quad (*)$$

Soluție. (*) are sens pentru $x \in \mathbb{N}$ și $x \geq 3$. Deoarece
 $C_{x-1}^{x-3} = C_{x-1}^2 = \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}$; $C_{x-2}^{x-3} = C_{x-2}^1 = x-2$, rezultă că
 $(*) \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{2} - 7(x-2) \leq 8(x-2) \Leftrightarrow (x-2)[x(x-1) - 30] \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 30) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+5)(x-6) \leq 0 \xLeftrightarrow{x \in \mathbb{N}}$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-6) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 4, \\ x = 5, \\ x = 6. \end{cases}$$

Răspuns: $x \in \{3, 4, 5, 6\}$.

40. Să se rezolve sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} C_{x+1}^{x-2} - C_{x+1}^{x-1} \leq 100, \\ C_{x+5}^4 - \frac{143 \cdot P_{x+5}}{96 \cdot P_{x+3}} < 0. \end{cases} \quad (D)$$

$$\text{Soluție. } (D) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)!}{(x-2)! \cdot 3!} - \frac{(x+1)!}{(x-1)! \cdot 2!} \leq 100, \\ \frac{(x+5)!}{4! \cdot (x+1)!} - \frac{143 \cdot (x+5)!}{96 \cdot (x+3)!} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{x \geq 2} \begin{cases} \frac{(x-1)x(x+1)}{3!} - \frac{x(x+1)}{2!} \leq 100, \\ \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{4!} - \frac{143(x+4)(x+5)}{96} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-4) \leq 600, \\ (x+4)(x+5)(4(x+2)(x+3) - 143) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 4x - 600 \leq 0, \\ 4x^2 + 20x - 119 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} x \geq 2 \\ \Leftrightarrow \\ x \in \mathbb{N} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 4x - 600 \leq 0, \\ x \in \{2, 3\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 4x - 600 \leq 0, \\ x = 2, \\ x^3 - 3x^2 - 4x - 600 \leq 0, \\ x = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 8 - 12 - 8 - 600 \leq 0, \\ x = 2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 27 - 27 - 12 - 600 \leq 0, \\ x = 3 \end{array} \right. \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Răspuns: $x \in \{2, 3\}$.

3.3. Exerciții propuse

1. O comisie este formată din președinte, adjunctul sau și încă cinci persoane. În câte moduri membrii comisiei pot distribui funcțiile între ei?
2. În câte moduri pot fi alese trei persoane dintr-un grup de 20 de persoane pentru a efectua o lucrare?
3. Într-o vază sunt 10 garoafe roșii și 4 roze. În câte moduri pot fi alese trei flori din vază?
4. Lacătul poate fi descuiat numai în cazul când a fost corect format un număr de trei cifre din cele cinci cifre fixate. Numărul este format la ghici, luând la întâmplare 3 cifre. S-a dovedit că numai la ultima încercare lacătul a fost descuiat. Câte încercări au precedat succesul?
5. Pe un raft sunt 30 de volume. În câte moduri pot fi aranjate cărțile, astfel încât volumele 1 și 2 să nu fie alături pe raft?
6. Patru trăgători trebuie să nimerească opt ținte (fiecare câte două). În câte moduri pot fi repartizate țintele între trăgători?
7. Câte numere de patru cifre, formate cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, conțin cifra 3, dacă: a) cifrele în număr nu se repetă; b) cifrele se pot repeta?
8. În secția de pian activează 10 persoane, în secția de declamatori 15 persoane, în secția de canto 12 persoane, iar în secția de fotografie – 20 de persoane. În câte moduri poate fi formată o echipă

în care să fie 4 declamatori, 3 pianiști, 5 cântăreți și un fotograf?

9. Șapte mere și trei portocale trebuie puse în două pungi în așa mod ca în fiecare din ele să fie cel puțin o portocală și numărul de fructe în pungi să fie același. În câte moduri poate fi realizată această repartizare?

10. Numărul de înmatriculare al unei remorci este compus din două litere și patru cifre. Câte numere de înmatriculare diferite pot fi formate utilizând 30 de litere și 10 cifre?

11. Pe o latură a unui triunghi sunt luate n puncte, pe latura a doua sunt luate m puncte, iar pe latura a treia a acestui triunghi sunt luate k puncte. În plus, nici unul din punctele considerate nu este vârf al triunghiului. Câte triunghiuri există cu vârfuri în aceste puncte?

12. În jurul unei mese trebuie așezați cinci cavaleri și cinci domnișoare în așa mod ca să nu stea alături nici două domnișoare, nici doi cavaleri. În câte moduri poate fi făcut acest lucru?

13. Două variante ale unei lucrări de control la matematică trebuie distribuite la 12 elevi. În câte moduri pot fi așezați elevii în două rânduri astfel încât elevii de alături să aibă variante diferite, iar cei care stau unul după altul să aibă aceeași variantă?

14. Șapte obiecte diferite trebuie distribuite la trei persoane. În câte moduri poate fi făcută această distribuire, dacă uneia sau la două persoane poate să nu le nimerească nici un obiect?

15. Câte numere de șase cifre pot fi formate cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, astfel încât cifrele să nu se repete, iar cifrele de la începutul numărului și de la sfârșitul lui să fie pare?

16. Câte numere diferite de patru cifre pot fi formate folosind cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dacă în fiecare din ele figurează cifra unu o singură dată, iar celelalte cifre se pot întâlni de mai multe ori?

17. Pentru a acorda premii câștigătorilor la olimpiada de matematică, au fost puse la dispoziție trei exemplare ale unei cărți, două exemplare ale altei cărți și un exemplar al cărții a treia. Câte premii pot fi acordate, dacă la olimpiadă au participat 20 de persoane și nimănui nu i se înmânează două cărți concomitent? Aceeași problemă,

dacă nimănui nu i se înmânează două exemplare ale uneia și aceleași cărți, dar pot fi înmânate două sau trei cărți diferite?

18. Literele alfabetului Morze sunt alcătuite din simboluri (puncte și liniuțe). Câte litere se pot desena, dacă vom cere ca fiecare literă să conțină nu mai mult de cinci simboluri?

19. Pentru a găsi prietenul rătăcit, niște excursioniști s-au divizat în două grupuri egale. Printre ei sunt numai patru persoane care cunosc împrejurimile. În câte moduri se pot diviza excursioniștii, astfel încât în fiecare grup să nimerească două persoane care cunosc împrejurimile, dacă în total sunt 16 persoane?

20. Fiecare din cei 10 radiști situați în punctul A se străduie să ia legătura cu fiecare din cei douăzeci de radiști situați în punctul B . Câte variante diferite de stabilire a acestor contacte pot fi?

Demonstrați egalitățile:

$$21. C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1};$$

$$22. C_n^m + C_{n-1}^m + \dots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1};$$

$$23. C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1};$$

$$24. C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = (n+1) \cdot 2^{n-1};$$

$$25. C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1};$$

$$26. \frac{C_n^1}{C_n^0} + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + \dots + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$27. C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n = 3^n;$$

$$28. 2C_n^0 + \frac{2^2C_n^1}{2} + \frac{2^3C_n^2}{3} + \dots + \frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1};$$

$$29. \frac{C_n^k}{C_n^k + C_n^{k+1}} + \frac{C_n^{k+5}}{C_n^{k+2} + C_n^{k+3}} = \frac{2C_n^{k+1}}{C_n^{k+1} + C_n^{k+2}}$$

(unde $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k+3$);

$$30. \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{2^0}{n!} = \frac{3^n}{n!};$$

$$\begin{aligned}
31. \sum_{k=0}^n C_{n+k}^n \cdot 1/2^k &= 2^n; & 32. \sum_{p=1}^n (pC_n^p)^2 &= n \cdot C_{2n-1}^{n-1}; \\
33. \sum_{k=0}^m C_p^k \cdot C_q^{m-k} &= C_{p+q}^m; & 34. \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k &= (-1)^n C_{n-1}^m; \\
35. \sum_{k=m}^n C_k^m \cdot C_n^k &= C_n^m \cdot 2^{n-m} \\
&(\text{unde } n, k, p, m, q \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Să se rezolve ecuațiile și sistemele de ecuații:

$$\begin{aligned}
36. A_x^2 : C_{x-1}^{x-1} &= 48; & 37. C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 &= 7(x-1); \\
38. A_x^4 : (A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}) &= 24/23; & 39. A_x^3 + C_x^{x-2} &= 14x; \\
40. A_x^3 - 2A_x^4 &= 3A_x^2; & 41. A_x^5 : C_{x-1}^{x-5} &= 336; \\
42. A_x^{x-3} &= xP_{x-2}; & 43. P_{x+2} : (A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3) &= 210; \\
44. A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} &= (30/7) \cdot P_x; \\
45. C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \dots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} &= 1023; \\
46. P_{x+3} : (A_x^5 \cdot P_{x-5}) &= 720; & 47. C_{2x}^{x+1} : C_{2x+1}^{x-1} &= 2/3; \\
48. A_{x-1}^2 - C_x^1 &= 79; & 49. 3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 &= x; \\
50. C_{x+1}^2 : C_x^3 &= 4/5; & 51. 12C_x^1 + C_{x+4}^2 &= 162; \\
52. A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-2} &= 14(x+1); & 53. P_{x+6} : (A_{x+4}^{n+4} \cdot P_{x-n}) &= 240; \\
54. C_{x+1}^{x-4} &= 7/15 \cdot A_{x+1}^3; & 55. C_{x+1}^3 : C_x^4 &= 6:5; \\
56. C_{x+1}^2 \cdot A_x^2 - 4x^3 &= (A_{2x}^1)^2; & 57. 3C_{x+1}^2 + P_2 \cdot x &= 4A_x^2; \\
58. A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20; & & 59. C_x^3 + C_x^4 &= 11C_{x+1}^2; \\
60. 11C_x^3 = 24C_{x+1}^2; & & 61. (A_{x+1}^8 + A_x^7) : A_{x-1}^6 &= 99; \\
62. A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! &= 90(x-1)!; & 63. C_x^5 &= C_x^3; \\
64. C_x^3 = 2C_x^{x-2}; & & 65. A_x^6 - 24xC_x^4 &= 11A_x^4; \\
66. A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} &= 101; & 67. \frac{1}{P_{x-1}} - \frac{1}{P_x} &= \frac{(x-1)^3}{P_{x+1}}; \\
68. 12C_{x-3}^{x+1} &= 55A_{x+1}^2; & 69. C_{5x-x^2+5}^x &= C_{11}^8; \\
70. A_x^5 = 18A_{x-2}^4; & & 71. (A_x^{10} - A_x^8) : A_x^8 &= 109;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
72. (n+2)! : (A_n^k \cdot (n-k)!) &= 132; & 73. \begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90, \\ A_x^y - 2C_x^y = 40; \end{cases} \\
74. C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} &= 6:5:2; \\
75. (A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} &= 10:2:1; \\
76. A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) &= 21:60:10; \\
77. C_x^{y-1} : C_x^y : C_x^{y+1} &= 2:3:4; & 78. \begin{cases} xA_{x-1}^{y-1} \cdot P_{x-y} = 15P_{x-1}, \\ 9C_{x+1}^y = 16C_x^{y+1}; \end{cases} \\
79. \begin{cases} A_{2x}^{3y} - 8A_{2x}^{3y-1} = 0, \\ 9C_{2x}^{3y} - 8C_{2x}^{3y-1} = 0; \end{cases} & 80. \begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1}, \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1}; \end{cases} \\
81. \begin{cases} xC_{n-2}^{k-1} + \frac{n-1}{k-1}y = \frac{k}{n-1}, \\ xC_{n-2}^{k-2} - \frac{n-1}{k}y = \frac{k-1}{n-1}; \end{cases} & 82. \begin{cases} 7C_x^1 \cdot y^{x-1} \cdot z = A_8^4, \\ C_x^2 \cdot y^{x-2} \cdot z^2 = A_{10}^3, \\ 11C_x^3 \cdot y^{x-3} \cdot z^3 = A_{13}^4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Să se rezolve inecuațiile și sistemele de inecuații:

$$\begin{aligned}
83. \frac{(x-1)!}{(x-3)!} &< 72; & 84. \frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} &< 1000; \\
85. x(x-3)! &< 108(x-4)!; & 86. C_x^5 &< C_x^6; \\
87. C_x^5 &> C_x^7; & 88. C_{20}^{x-1} &< C_{20}^x; \\
89. C_{16}^{x-2} &> C_{16}^x; & 90. C_x^5 &< C_x^3; \\
91. C_{13}^x &< C_{13}^{x+2}; & 92. C_{18}^{x-2} &> C_{18}^x; \\
93. C_x^6 &< C_x^4; & 94. 5C_x^3 &< C_{x+2}^4; \\
95. C_{x+1}^{x-1} &> 3/2; & 96. 2C_x^5 &> 11C_{x-2}^3; \\
97. C_x^{x-1} &\leq C_x^{x-3}; & 98. C_{2x}^{2x-8} &\geq C_{2x}^{2x-12}; \\
99. xC_{x-1}^{x-2} - 7C_{x-2}^{x-3} &\leq 8(x-2); & 100. C_{x+1}^{x-2} - C_{x+1}^{x-1} &\leq 100; \\
101. A_{x+1}^4 : C_{x-1}^{x-3} &> 14P_3; & 102. C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4}A_{x-2}^4 &< 0; \\
103. C_{x+5}^4 - \frac{143P_{x+5}}{96P_{x+3}} &< 0; & 104. \frac{A_{x+2}^3}{P_{x+2}} - \frac{143}{4P_{x-1}} &< 0;
\end{aligned}$$