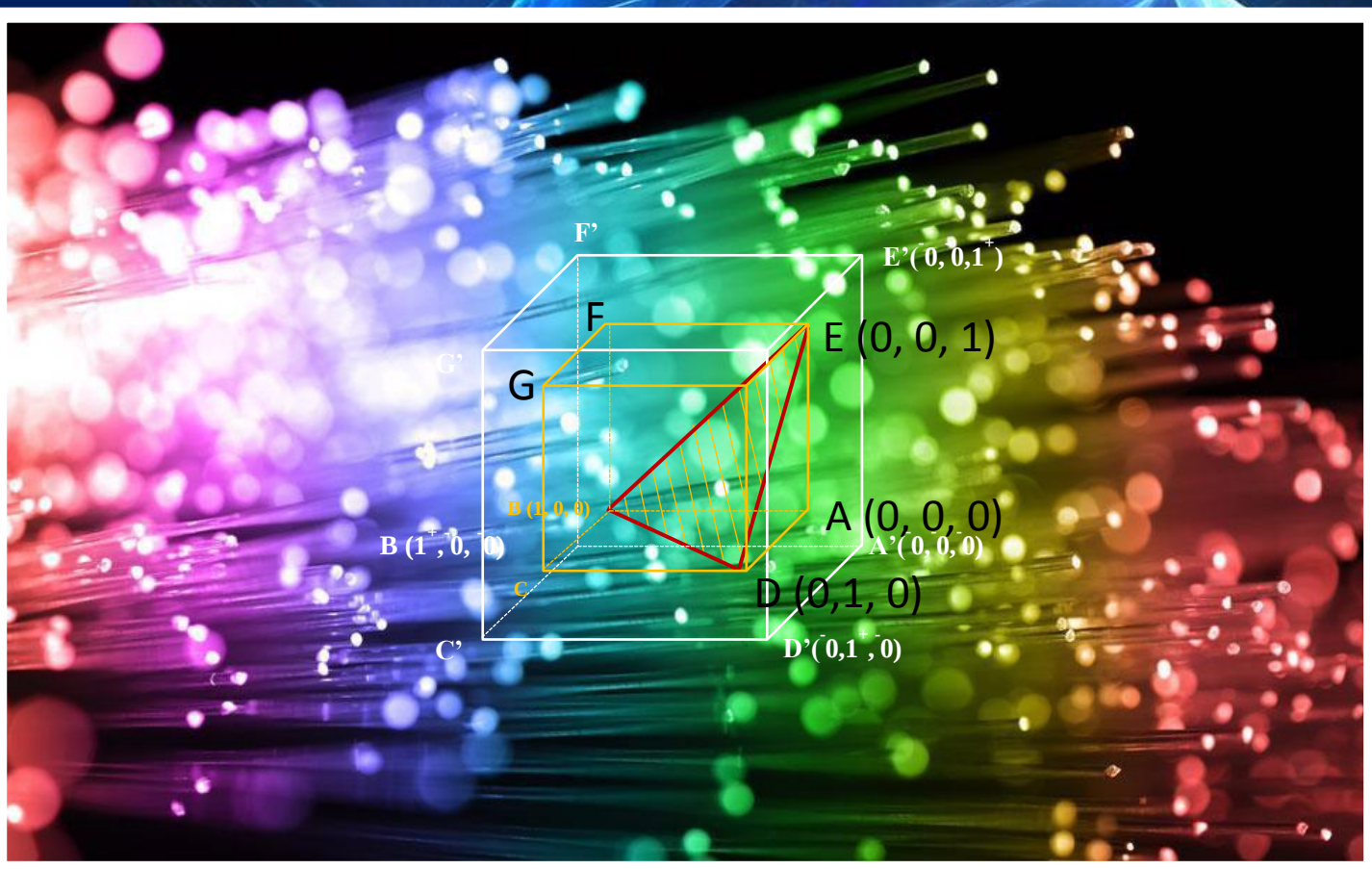
Neutrosophic Knowledge

JOURNAL OF MODERN SCIENCE AND ARTS

Volume 4, 2024



Editors-in-Chief

Salah Bouzina, Florentin Smarandache

ISSN 2767-0619 (Print)

ISSN 2767-0627 (Online)

Neutrosophic Science
International Association (NSIA)

Published by the UNIVERSITY OF NEW MEXICO, United States

NEUTROSOPHIC KNOWLEDGE

JOURNAL OF MODERN SCIENCE AND ARTS

Editors-in-Chief

Salah Bouzina, Florentin Smarandache

ISSN 2767-0619 (Print)

ISSN 2767-0627 (Online)

ISSN 2767-0627 (online)

ISSN 2767-0619 (Print)

Neutrosophic Knowledge

An international Journal concerned with publishing in all scientific and literary fields

Papers Published in Arabic and English

Copyright Notice

Copyright @ Neutrosophics Knowledge

All rights reserved. The authors of the articles do hereby grant Neutrosophic Knowledge non-exclusive, worldwide, royalty-free license to publish and distribute the articles in accordance with the Budapest Open Initiative: this means that electronic copying, distribution and printing of both full-size version of the journal and the individual papers published therein for non-commercial, academic or individual use can be made by any user without permission or charge. The authors of the articles published in Neutrosophic Knowledge retain their rights to use this journal as a whole or any part of it in any other publications and in any way they see fit. Any part of Neutrosophic Knowledge howsoever used in other publications must include an appropriate citation of this journal.

Information for Authors and Subscribers

"Neutrosophics Knowledge" has been created for publications on advanced studies in neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic logic, neutrosophic probability, neutrosophic statistics that started in 1995 and their applications in any field, such as the neutrosophic structures developed in algebra, geometry, topology, etc.

The submitted papers should be professional, in good Arabic, Turkish, English and French, containing a brief review of a problem and obtained results.

Neutrosophy is a new branch of philosophy that studies the origin, nature, and scope of neutralities, as well as their interactions with different ideational spectra.

Copyright © Neutrosophic Knowledge, 2024

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

This theory considers every notion or idea <A> together with its opposite or negation <antiA> and with their spectrum of neutralities <neutA> in between them (i.e. notions or ideas supporting neither <A> nor <antiA>). The <neutA> and <antiA> ideas together are referred to as <nonA>.

Neutrosophy is a generalization of Hegel's dialectics (the last one is based on <A> and <antiA> only).

According to this theory every idea <A> tends to be neutralized and balanced by <antiA> and <nonA> ideas - as a state of equilibrium.

In a classical way <A>, <neutA>, <antiA> are disjoint two by two. But, since in many cases the borders between notions are vague, imprecise, Sorites, it is possible that <A>, <neutA>, <antiA> (and <nonA> of course) have common parts two by two, or even all three of them as well.

Neutrosophic Set and *Neutrosophic Logic* are generalizations of the fuzzy set and respectively fuzzy logic (especially of intuitionistic fuzzy set and respectively intuitionistic fuzzy logic). In neutrosophic logic a proposition has a degree of truth
(*T*), a degree of indeterminacy (*I*), and a degree of falsity (*F*), where *T, I, F* are standard or non-standard subsets of *]-0, 1+[*.

Neutrosophic Probability is a generalization of the classical probability and imprecise probability.

Neutrosophic Statistics is a generalization of the classical statistics.

What distinguishes the neutrosophics from other fields is the <neutA>, which means neither <A> nor <antiA>.

<neutA>, which of course depends on <A>, can be indeterminacy, neutrality, tie game, unknown, contradiction, ignorance, imprecision, etc.

All submissions should be designed in MS Word format using our template file:
http:// fs.unm.edu/NK/Nk-paper-template.doc.

A variety of scientific books in many languages can be downloaded freely from the Digital Library of Science:
http:// fs.unm.edu/ScienceLibrary.htm.

To submit a paper, mail the file to the Editor-in-Chief. To order printed issues, contact the Editor-in-Chief. This journal is non-commercial, academic edition. It is printed from private donations.

Information about the neutrosophics you get from the UNM website:
http:// fs.unm.edu/neutrosophy.htm.. The home page of the journal is accessed on http://fs.unm.edu/NK.

Copyright © Neutrosophic Knowledge, 2024

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

Editors-in-Chief

Dr. Salah Bouzina, Department of Philosophy, Faculty of Human Science and Sociology, University Constantine 2 Abdelhamid Mehri, Constantine 25000, Algeria, E-mail: salah.bouzina@univ-constantine2.dz

Prof. Dr. Florentin Smarandache, Postdoc, Department of Mathematics, University of New Mexico, Gallup,NM 87301, USA, Email: smarand@unm.edu

Associate Editors

Dr. Ahmed Hatip, Department of Mathematics, Faculty of science, University of Gaziantep 27000, Turkey, E-mail: kollnaar5@gmail.com

Dr. Abdelhamid Bounemeur, Electronics Department, The National Polytechnic School of Constantine, University Constantine 3 Salah Boubnider, Constantine 25000, Algeria, E-mail: abdelhamid.bounemeur@umc.edu.dz

Dr. Soheyb Milles, Department of Mathematics and Computer Science, University Center of Barika, Barika 05400, Algeria, E-mail: soheyb.milles@cu-barika.dz

Copyright © Neutrosophic Knowledge, 2024

ISSN 2767-0627 (online)

ISSN 2767-0619 (Print)

Editors

Said Broumi, Laboratory of Information Processing, Faculty of Science Ben M'Sik, University of Hassan II, Casablanca, Morocco, Email: s.broumi@flbenmsik.ma.
Saeid Jafari, College of Vestsjaelland South, Slagelse, Denmark, Email: jafaripersia@gmail.com.
Valeri Kroumov, Okayama University of Science, Okayama, Japan, Email: val@ee.ous.ac.jp
A. A. Agboola, Federal University of Agriculture, Abeokuta, Nigeria, Email: agboolaaaa@funaab.edu.ng.
Riad K. Al-Hamido, Math Department, College of Science, Al-Baath University, Homs, Syria, Email: riad-hamido1983@hotmail.com.
Faruk Karaaslan, Çankırı Karatekin University, Çankırı, Turkey, Email: fkaraaslan@karatekin.edu.tr
Yanhui Guo, University of Illinois at Springfield, OneUniversity Plaza, Springfield, IL 62703, United States, Email: yguo56@uis.edu
Abeer T. Khalil, Electrical Engineering Department, Benha Faculty of Engineering, Benha University, Egypt, Email: Abeer.Twakol@bhit.bu.edu.eg
Giorgio Nordo, MIFT - Department of Mathematical and Computer Science, Physical Sciences and Earth Sciences, Messina University, Italy, Email: giorgio.nordo@unime.it.
Le Hoang Son, VNU Univ. of Science, Vietnam National Univ. Hanoi, Vietnam, Email: sonlh@vnu.edu.vn.
Young Bae Jun, Gyeongsang National University, South Korea, Email: skywine@gmail.com.
Yo-Ping Huang, Department of Computer Science and Information, Engineering National Taipei University,New Taipei City, Taiwan, Email: yphuang@ntut.edu.tw.
Vakkas Ulucay, Kilis 7 Aralık University, Turkey, Email: vulucay27@gmail.com.
Peide Liu, Shandong University of Finance and Economics, China, Email: peide.liu@gmail.com.
Jun Ye, Department of Electrical and Information Engineering, Shaoxing University, 508 Huancheng West Road, Shaoxing 312000, China; Email: yejun@usx.edu.cn.
Memet Şahin, Department of Mathematics, Gaziantep University, Gaziantep 27310, Turkey, Email: mesahin@gantep.edu.tr
Fahmi Khalifa, Electronics and Communications Engineering Department, Faculty of Engineering, Mansoura University Mansoura, Egypt, Email: fahmikhalifa@mans.edu.eg.
Elsayda Hamdy Nasr Abd Elhalim, Assistant professor of Maternity, Obstetrics & Gynecological Nursing - Port Said university – Egypt, E-mal: e.abdelhalim@psau.edu.sa.
Mutaz Mohammad, Department of Mathematics, Zayed University, Abu Dhabi 144534, United Arab Emirates.
Email: Mutaz.Mohammad@zu.ac.ae. Abdullahi Mohamud Sharif, Department of Computer Science, University of Somalia, Makka Al-mukarrama Road, Mogadishu, Somalia, Email: abdullahi.shariif@uniso.edu.so.
NoohBany Muhammad, American University of Kuwait, Kuwait, Email: noohmuhammad12@gmail.com.
Pattathal Vijayakumar Arun, College of Science and Technology, Phuentsholing, Bhutan, Email: arunpv2601@gmail.com.
Endalkachew Teshome Ayele, Department of Mathematics, Arbaminch University, Arbaminch, Ethiopia, Email: endalkachewteshome83@yahoo.com.
Xindong Peng, School of Information Science and Engineering, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China, Email: 952518336@qq.com.
Xiao-Zhi Gao, School of Computing, University of Eastern Finland, FI-70211 Kuopio, Finland, xiaozhi.gao@uef.fi.
Madad Khan, Comsats Institute of Information Technology, Abbottabad, Pakistan, Email: madadmath@yahoo.com.
Dmitri Rabounski and Larissa Borissova, independent researchers, Emails: rabounski@ptep-online.com,
Selcuk Topal, Mathematics Department, Bitlis Eren University, Turkey, Email: s.topal@beu.edu.tr.
Muhammad Aslam & Mohammed Alshumrani, King Abdulaziz Univ., Jeddah, Saudi Arabia, Email:magmuhammad@kau.edu.sa.
Luu Quoc Dat, Univ. of Economics and Business,

Copyright © Neutrosophic Knowledge, 2024

ISSN 2767-0627 (online) ISSN 2767-0619 (Print)

Maikel Leyva-Vazquez, Universidad de Guayaquil, Ecuador, Email: mleyvaz@gmail.com.
Tula Carola Sanchez Garcia, Facultad de Educacion de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Peru, Email: tula.sanchez1@unmsm.edu.pe.
Tatiana Andrea Castillo Jaimes, Universidad de Chile, Departamento de Industria, Doctorado en Sistemas de Ingeniería, Santiago de Chile, Chile, Email: tatiana.a.castillo@gmail.com.
Muhammad Akram, University of the Punjab, New Campus, Lahore, Pakistan, Email: m.akram@pucit.edu.pk.
Irfan Deli, Muallim Rifat Faculty of Education, Kilis 7 Aralik University, Turkey, Email: irfandeli@kilis.edu.tr.
Ridvan Sahin, Department of Mathematics, Faculty of Science, Ataturk University, Erzurum 25240, Turkey,
Email: mat.ridone@gmail.com.
Ibrahim M. Hezam, Department of computer, Faculty of Education, Ibb University, Ibb City, Yemen, Email: ibrahizam.math@gmail.com.
Aiyared Iampan, Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Phayao 56000, Thailand, Email: aiyared.ia@up.ac.th.
Ameirys Betancourt-Vázquez, 1 Instituto Superior Politécnico de Tecnologias e Ciências (ISPTEC), Luanda, Angola, Email: ameirysbv@gmail.com.
Karina Pérez-Teruel, Universidad Abierta para Adultos (UAPA), Santiago de los Caballeros, República Dominicana, Email: karinapt@gmail.com.
Neilys González Benítez, Centro Meteorológico Pinar del Río, Cuba, Email: neilys71@nauta.cu.
Jesus Estupinan Ricardo, Centro de Estudios para la Calidad Educativa y la Investigation Cinetifica, Toluca, Mexico, Email: jestupinan2728@gmail.com.
Victor Christianto, Malang Institute of Agriculture (IPM), Malang, Indonesia, Email: victorchristianto@gmail.com.
Wadei Al-Omeri, Department of Mathematics, Al-Balqa Applied University, Salt 19117, Jordan, Email: wadeialomeri@bau.edu.jo.
Ganeshsree Selvachandran, UCSI University, Jalan Menara Gading, Kuala Lumpur, Malaysia, Email: Ganeshsree@ucsiuniversity.edu.my.
Ilanthenral Kandasamy, School of Computer Science and Engineering (SCOPE), Vellore Institute of Technology (VIT), Vellore 632014, Tamil Nadu, India,
Email: ilanthenral.k@vit.ac.in
G. Srinivasa Rao, Department of Statistics, The University of Dodoma, Dodoma, PO. Box: 259, Tanzania, Email: gaddesrao@gmail.com.
Kul Hur, Wonkwang University, Iksan, Jeollabukdo,
South Korea, Email: kulhur@wonkwang.ac.kr.
Kemale Veliyeva & Sadi Bayramov, Department of Algebra and Geometry, Baku State University, 23 Z. Khalilov Str., AZ1148, Baku, Azerbaijan, Email: kemale2607@mail.ru, Email: baysadi@gmail.com.
Irma Makharadze & Tariel Khvedelidze, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Tbilisi, Georgia.
Inayatur Rehman, College of Arts and Applied Sciences, Dhofar University Salalah, Oman, Email: irehman@du.edu.om.
Riad K. Al-Hamido, Math Department, College of Science, Al-Baath University, Homs, Syria, Email: riadhamido1983@hotmail.com.
Faruk Karaaslan, Çankırı Karatekin University, Çankırı, Turkey, Email: fkaraaslan@karatekin.edu.tr.
Morrisson Kaunda Mutuku, School of Business, Kenyatta University, Kenya Surapati Pramanik, Department of Mathematics,
Nandalal Ghosh B T College, India, Email: drspramanik@isns.org.in.
Suriana Alias, Universiti Teknologi MARA (UiTM) Kelantan, Campus Machang, 18500 Machang, Kelantan, Malaysia, Email: suria588@kelantan.uitm.edu.my.
Arsham Borumand Saeid, Dept. of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran, Email: arsham@uk.ac.ir.
V.V. Starovoytov, The State Scientific Institution «The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus», Minsk, Belarus, Email: ValeryS@newman.bas-net.by.
E.E. Eldarova, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan, Email: Doctorphd_eldarova@mail.ru.
Mohammad Hamidi, Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran. Email: m.hamidi@pnu.ac.ir.
Lemnaouar Zedam, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, University
Mohamed Boudiaf, M'sila, Algeria, Email: l.zedam@gmail.com.
Vietnam National Univ., Hanoi, Vietnam, Email: datlq@vnu.edu.vn.

Copyright © Neutrosophic Knowledge, 2024

ISSN 2767-0627 (online)

ISSN 2767-0619 (Print)

Content

Necati Olgun, and Hatice Kahraman, **On The Symbolic 2-Plithogenic Calculus** 1

Salah Bouzina, **Neutrosophic Logic and Paradoxism School** 9

Necati Olgun, and Hatice Kahraman, **On The Symbolic 2-Plithogenic Fractional Calculus** 22

Hasan Dadaş, **Nötrosofik Esnek Çiftsel Açık ve Kapalı Kümeler** 36

Hasan Dadaş, **Nötrosofik Esnek Çiftsel Kapanış Operatör** 38

M. Touqeer, Sajeela Fatima, **Multi-Attribute Decision MAKing for Smog Control Using Extended Vector Similarity Measure Based on Interval Type-2 Intuitionistic Fuzzy Sets** 43

Kachchouh Mustapha, **Introduction to Neutrosophic Philosophy: Application of Neutrosophic Logic to Philosophy** 58

Soheyb Milles, Hadjer Berri and Amira Abidat, **On Neutrosophic Topological Spaces in Sostak's Sense** 73

Florentin Smarandache, **Neutrosophie : un cadre interdisciplinaire pour une meilleure compréhension de l'incertitude et de l'indétermination** 82

Copyright © Neutrosophic Knowledge, 2024

Neutrosophic Knowledge, Vol. 04, 2024
University of New Mexico

Article

On The Symbolic 2-Plithogenic Calculus

Necati Olgun[1], and Hatice Kahraman[2,]*

[1] Department of Mathematics, Gaziantep University, Turkey 1; olgun@gantep.edu.tr
[2] Department of Mathematics, Gaziantep University, Turkey 1; kahramannhatiice@gmail.com

* Correspondence: kahramannhatiice@gmail.com

Received: 04 05, 2024; *Accepted:* 04 10, 2024.

Abstract: Depending on the geometric isometry (AH-Isometry), it has been proven that every Neutrosophic real function is equivalent to three real functions. Then, the foundation of the symbolic 2-plithogeniccalculuswas established, where new definitions of symbolic 2-plithogenicintegration and symbolic 2-plithogenicdifferentiation were introduced, along with some illustrative examples. Following that, definitions for the symbolic 2-plithogenicgamma function and symbolic 2-plithogenicbeta function were presented to pave the way towards achieving the desired goal, which is symbolic 2-plithogenicFractional calculus.

Keywords: Symbolic 2-PlithogenicReal Function, Symbolic 2-PlithogenicIntegration,Symbolic 2-PlithogenicDerivative,Symbolic 2-PlithogenicGamma Function and Symbolic 2-PlithogenicBeta Function.

1. Introduction

Neutrosophy is a new branch of philosophy concerns with the indeterminacy in all areas of life and science. It has become a useful tool in generalizing many classical systems such as equations [1,9], number theory [2,3], topology [4,5], linear spaces [6,10], modules [4,5], and ring of matrices [7,8].

In the literature, we find many studies about neutrosophic calculus, where some definitions and properties were presented about neutrosophic real functions and numbers [10].The neutrosophic real functions with one variable were defined only in a special case [11], as follows:

Recently, Abobala and Hatip, have presented the concept of two-dimensional AH-isometry to study the correspondence between neutrosophic plane $R(I)\times R(I)$ and the classical module $R^2\times R^2$. Also, the one-dimensional AH-isometry between *R(I)* and $R\times R$. This isometry was useful in defining inner products and norms [10], ordering [9], and neutrosophic geometrical shapes [10].

In [12], the concept of symbolic n-plithogenic algebraic structures was proposed by Smarandache, then it was used on a wide range by many researchers to generalize classical algebraic structures such as modules [13], spaces [14-15], equations [16], and number theory [17-18]. In [19], the concept of symbolic 2-plithogenic matrices was presented with many applications in the theory of algebraic equations and representing functions. Laterally, symbolic 3-plithogenic matrices and 4-plithogenic matrices were studied from many algebraic sides, especially those which are related to the diagonalization problem [20].

In this work, we use the one-dimensional AH-isometry to turn the general case of symbolic 2-plithogenic neutrosophic real functions with one variable into three classical real functions so we

will go from $2-SP_R$ space into $R\times R\times R$ space. The definitions of symbolic 2-plithogenic integration and symbolic 2-plithogenic differentiation were introduced.

Following that, definitions for the symbolic 2-plithogenicGamma function and symbolic 2-plithogenicBeta function were presented to pave the way towards symbolic 2-plithogenic Fractional calculus.

2. Terminologies

We present here some basic definitions and axioms of neutrosophic logic and refined neutrosophic logic.

Definition 2.1. [21]: Let X be a non-empty fixed set. A neutrosophic set A is an object having the form $\{x,(\mu_A(x),\delta_A(x),\gamma_A(x)):x\in X\}$, where $\mu_A(x)$, $\delta_A(x)$ and $\gamma_A(x)$ represent the degree of membership, the degree of indeterminacy , and the degree of non-membership respectively of each element $x\in X$ to the set A .

Definition 2.2.[22]:Let K be a field, the neutrosophic file generated by $\langle K\cup I\rangle$ which is denoted by $K(I)=\langle K\cup I\rangle$.

Definition 2.3. [23]:Classical neutrosophic number has the form $a+bI$ where a,b are real or complex numbers and I is the indeterminacy such that $0\cdot I=0$ and $I^2=I$ which results that $I^n=I$ for all positive integers n.

Definition 2.4.[24]Let $R(I)=\{a+bI\,;a,b\in R\}$ where $I^2=I$ be the neutrosophic field of reals. The one-dimensional isometry (AH-Isometry) is defined as follows: [49]

$$T:R(I)\to R\times R\,;\ T(a+bI)=(a,a+b)$$

Remark 2.5. [24]

$T$is an algebraic isomorphism between two rings, it has the following properties:

1) $T$is bijective.
2) T preserves addition and multiplication, i.e.:
3) Since T is bijective, then it is invertible by:

$$T^{-1}:R\times R\to R(I)\,;\ T^{-1}(a,b)=a+(b-a)I$$

4) T preserves distances, i.e.:

$$\|T(AB)\|=T(\|AB\|)$$

Definition 2.6. [25]:Let $f:R(I)\to R(I);f=f(X)$ and $X=x+yI\in R(I)$ the f is called a neutrosophic real function with one neutrosophic variable.

a neutrosophic real function $f(X)$ written as follows:

$$f(X)=f(x+yI)=f(x)+I[f(x+y)-f(x)]$$

Definition 2.7.[25]:Let R be a ring, the symbolic 2-plithogenic ring is defined as follows:

$$2-SPR=\{a_0+a_1I_1+a_2I_2;\ a_i\in R,{I_1}^2=I_1,\ {I_2}^2=I_2,\ I_1\times I_2=I_{max(1,2)}=I_2\ \}.$$

Smarandache has defined algebraic operations on $2-SP_R$ as follows:

Addition:

$$[a_0+a_1I_1+a_2I_2]+[b_0+b_1I_1+b_2I_2]=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)I_1+(a_2+b_2)I_2\ .$$

Multiplication:

$$[a_0+a_1I_1+a_2I_2\ ].[b_0+b_1I_1+b_2I_2\ ]=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1)I_1+(a_0b_2+a_1b_2+a_2b_0+a_2b_1+a_2b_2)I_2.$$

Definition 2.8. Let $2-SP_R=\{a+bI_1+cI_2\,;a,b,C\in R\}$ where

$${I_1}^2=I_1\,,{I_2}^2=I_2\ and\ I_1I_2=I_2I_1=I_2$$

Be the symbolic 2-plithogenic field of reals. The symbolic 2-plithogenic isometry (AH-Isometry) is defined as follows:

$$T: 2 - SP_R \to R \times R \times R \; ; \; T(a + bI_1 + cI_2) = (a, a + b + c, a + c)$$

Remark 2.9.

1) T is bijective, then it is invertible by:
$$T^{-1}: R \times R \times R \to 2 - SP_R \; ; \; T^{-1}(a, b, c) = a + (b - c)I_1 + (c - a)I_2$$
2) T preserves distances, i.e.:
$$\|T(AB)\| = T(\|AB\|)$$

3. Symbolic 2-plithogenicCalculus

3.1 Symbolic 2-plithogenicReal Function

Definition 3.1.1. Let $f: 2 - SP_R \to 2 - SP_R$; $f = f\big(X(I_1, I_2)\big)$ and $X = x + yI_1 + zI_2 \in 2 - SP_R$the f is called the symbolic 2-plithogenicreal function with the symbolic 2-plithogenicvariable, written as follows:

$$f\big(X(I_1, I_2)\big) = f(x + yI_1 + zI_2) = f(x) + \big(f(x + y + z) - f(x + z)\big)I_1 + \big(f(x + z) - f(x)\big)I_2$$

Theorem 3.1.2. Any symbolic 2-plithogenic real function into three classical real functions, i.e., to the classical Euclidean plane $R \times R \times R$.

Proof.

Let $f\big(X(I_1, I_2)\big) = f(x + yI_1 + zI_2) = f(x) + \big(f(x + y + z) - f(x + z)\big)I_1 + \big(f(x + z) - f(x)\big)I_2$ a symbolic 2-plithogenic real function.

Now, Using the one-dimensional AH-isometry, we have.

$T\left(f\big(X(I_1, I_2)\big)\right) = T\big(f(x) + \big(f(x + y + z) - f(x + z)\big)I_1 + \big(f(x + z) - f(x)\big)I_2\big)$, then.

$(f_1, f_2, f_3) = \big(f(x), f(x + y + z) - f(x + z), f(x + z) - f(x)\big)$, then, we have.

$$\begin{cases} f_1 = f(x) \\ f_2 = f(x + y + z) - f(x + z) \\ f_3 = f(x + z) - f(x) \end{cases}$$

The functions $f(x), f(x + y + z) - f(x + z), f(x + z) - f(x)$ are three real functions.

Exemple 3.1.3. Let $2 - SP_R$ be the symbolic 2-plithogenic field of reals, we have:

1. $f\big(X(I_1, I_2)\big) = e^{x + yI_1 + zI_2}$
$= e^x + (e^{x+y+z} - e^{x+z})I_1 + (e^{x+z} - e^x)I_2$
2. $f\big(X(I_1, I_2)\big) = \ln(x + yI_1 + zI_2)$
$= ln(x) + \big(ln(x + y + z) - ln(x + z)\big)I_1 + \big(ln(x + z) - ln(x)\big)I_2$, where
$x + yI_1 + zI_2 > 0 + 0I_1 + 0I_2$.
3. $f\big(X(I_1, I_2)\big) = \sqrt{x + yI_1 + zI_2}$
$= \sqrt{x} + \big(\sqrt{x + y + z} - \sqrt{x + z}\big)I_1 + \big(\sqrt{x + z} - \sqrt{x}\big)I_2$, where
$x + yI_1 + zI_2 \geq 0 + 0I_1 + 0I_2$.
4. $f\big(X(I_1, I_2)\big) = sin(x + yI_1 + zI_2)$
$= sin(x) + \big(sin(x + y + z) - sin(x + z)\big)I_1 + \big(sin(x + z) - sin(x)\big)I_2$

3.2 The Derivative of Symbolic 2-plithogenic Real Functions on $2 - SP_R$.

Definition 3.2.1. Let $f\big(X(I_1, I_2)\big)$a symbolic 2-plithogenic function on $2 - SP_R$, the we define a derivative of a symbolic 2-plithogenic function $f\big(X(I_1, I_2)\big)$ as follows:

$$f'_{X(I_1,I_2)}\big(X(I_1, I_2)\big) = f'_x(x) + \left(f'_{x+y}(x + y + z) - f'_{x+z}(x + z)\right) I_1 + \big(f'_{x+z}(x + z) - f'_x(x)\big)I_2$$

Examples 3.2.2.

1. $e^{X(I_1,I_2)} = e^{x+yI_1+zI_2} = e^x + (e^{x+y+z} - e^{x+z})I_1 + (e^{x+z} - e^x)I_2$
we have:
$f'_{X(I_1,I_2)}\big(X(I_1,I_2)\big) = e^x + (e^{x+y+z} - e^{x+z})I_1 + (e^{x+z} - e^x)I_2 = e^{x+yI_1+zI_2}$.

2. $f\big(X(I_1,I_2)\big) = ln(x + yI_1 + zI_2)$
$= ln(x) + \big(ln(x + y + z) - ln(x + z)\big)I_1 + \big(ln(x + z) - ln(x)\big)I_2$, where
$x + yI_1 + zI_2 > 0 + 0I_1 + 0I_2$.
We have.

$$f'_{X(I_1,I_2)}\big(X(I_1,I_2)\big) = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{x+z}\right)I_1 + \left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x}\right)I_2$$

3. $f\big(X(I_1,I_2)\big) = sin(x + yI_1 + zI_2)$
$= sin(x) + \big(sin(x + y + z) - sin(x + z)\big)I_1 + \big(sin(x + z) - sin(x)\big)I_2$

We have.
$f'_{X(I_1,I_2)}\big(X(I_1,I_2)\big) = cos(x) + \big(cos(x + y + z) - cos(x + z)\big)I_1 + \big(cos(x + z) - cos(x)\big)I_2$
$= cosX(I_1,I_2)$.

3.3 The Integral of Symbolic 2-plithogenic Functions on $2 - SP_R$.

Definition 3.3.1. Let $f\big(X(I_1,I_2)\big)$ a symbolic 2-plithogenic function on $2 - SP_R$, the we define a integration of a symbolic 2-plithogenic function $f\big(X(I_1,I_2)\big)$as follows:

$$\int f\big(X(I_1,I_2)\big)\,dX(I_1,I_2) = F\big(X(I_1,I_2)\big) = F(x) + [F(x + y + z) - F(x + z)]I_1 + [F(x + z) - F(x)]I_2.$$

Examples 3.3.2.

1. $f\big(X(I_1,I_2)\big) = e^{X(I_1,I_2)}$. We have.

$$\int e^{x+yI_1+zI_2}\,dX$$
$$= \int e^x\,dx + \left[\iint e^{x+y+z}\,d(x + y + z) - \int e^{x+z}\,d(x + z)\right]I_1$$
$$+ \left[\int e^{x+z}\,d(x + z) - \int e^x\,dx\right]I_1$$
$$= e^x + (e^{x+y+z} - e^{x+z})I_1 + (e^{x+z} - e^x)I_2 + a + bI_1 + cI_2$$
$$= e^{x+yI_1+zI_2} + a + bI_1 + cI_2$$

wherea, b, c are conests.

2. $f\big(X(I_1,I_2)\big) = cos(x + yI_1 + zI_2)$ we have

$$\int cos(x + yI_1 + zI_2)\,dX(I_1,I_2)$$
$$= \int cos(x)\,dx + \left[\iint cos(x + y + z)\,d(x + y + z) - \int cos(x + z)d(x + z)\right]I_1$$
$$+ \left[\int cos(x + z)\,d(x + z) - \int cos(x)\,dx\right]I_1$$
$$= sin(x) + \big(sin(x + y + z) - sin(x + z)\big)I_1 + \big(sin(x + z) - sin(x)\big)I_2 + a$$
$$+ bI_1 + cI_2 = sin(x + yI_1 + zI_2) + a + bI_1 + cI_2$$

wherea, b, c are conests.

3.4 The Definite Integration of Symbolic 2-plithogenic Functions on $2 - SP_R$.

Definition 2.4.1.

Let $f\big(X(I_1,I_2)\big)$ a symbolic 2-plithogenic function on $2 - SP_R$, we define the definite integration of a symbolic 2-plithogenic function $f\big(X(I_1,I_2)\big)$ as follows:

$$\int_{a+bI_1+cI_2}^{d+eI_1+fI_2} f\big(X(I_1,I_2)\big)dX(I_1,I_2)$$
$$= \int_a^d f(x)dx + \left[\int_{a+b+c}^{d+e+f} f(x+y+z)d(x+y+z) - \int_{a+c}^{d+f} f(x+z)d(x+z)\right]I_1$$
$$+ \left[\int_{a+c}^{d+f} f(x+z)d(x+z) - \int_a^d f(x)dx\right]I_2$$

Example 3.4.2.

1. $J = \int_{0+0I_1+0I_2}^{1+I_1+I_2} e^{X(I_1,I_2)}dX(I_1,I_2)$
$$= \int_0^1 e^x dx + \left[\int_0^3 e^{(x+y+z)}d\big((x+y+z)\big) - \int_1^2 e^{(x+z)}d(x+z)\right]I_1$$
$$+ \left[\int_1^2 e^{(x+z)}d\big((x+y+z)\big) - \int_0^1 e^x dx\right]I_2$$
$$= [e^x]_0^1 + \big[[e^{(x+y+z)}]_0^3 - [e^{(x+z)}]_1^2\big]I_1 + \big[[e^{(x+z)}]_1^2 - [e^x]_0^1\big]I_2$$

$J = (e-1) + \big((e^3-1) - (e^2-e)\big)I_1 + \big((e^2-e) - (e-1)\big)I_2.$

4.1 Useful Symbolic 2-plithogenic Functions

Definition 4.1.1. The most basic interpretation of the symbolic 2-plithogenicGamma function is simply the generalization of the symbolic 2-plithogenicfactorial for all symbolic 2-plithogenicreal numbers.

We define a symbolic 2-plithogenicGamma function as follows:

$$\Gamma\big(Z(I_1,I_2)\big) = \Gamma(z_1 + z_2I_1 + z_3I_2)$$
$$= \Gamma(z_1) + \big(\Gamma(z_1+z_2+z_3) - \Gamma(z_1+z_3)\big)I_1 + \big(\Gamma(z_1+z_3) - \Gamma(z_1)\big)I_2$$
$$= \int_0^\infty (t_1+t_2I_1+t_3I_2)^{(z_1+z_2I_1+z_3I_2)-1}\, e^{-(t_1+t_2I_1+t_3I_2)}\, d(t_1+t_2I_1+t_3I_2)$$

Remark 4.1.2.

1. $\Gamma(1+0I_1+0I_2) = \Gamma(1) + \big(\Gamma(1)-\Gamma(1)\big)I_1 + \big(\Gamma(1)-\Gamma(1)\big)I_2 = 1$

And we can proof in this way,

$$\Gamma(1) = \Gamma(1 + 0I_1 + 0I_2) = \int_0^{\infty} (t_1 + t_2I_1 + t_3I_2)^{1-1}\, e^{-(t_1+t_2I_1+t_3I_2)}\, d(t_1 + t_2I_1 + t_3I_2)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(t_1+t_2I_1+t_3I_2)}\, d(t_1 + t_2I_1 + t_3I_2)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t_1} d(t_1) + \left[\int_0^{\infty} e^{-(t_1+t_2+t_3)} d(t_1 + t_2 + t_3) - \int_0^{\infty} e^{-(t_1+t_3)} d\big((t_1 + t_3)\big)\right] I_1$$

$$+ \left[\int_0^{\infty} e^{-(t_1+t_3)} d(t_1 + t_3) - \int_0^{\infty} e^{-t_1} d(t_1)\right] I_2$$

$$\Gamma(1) = \left[-e^{-t_1}\right]_0^{\infty} + \left(\left[-e^{-(t_1+t_2+t_3)}\right]_0^{\infty} - \left[-e^{-(t_1+t_3)}\right]_0^{\infty}\right) I_1 + \left(\left[-e^{-(t_1+t_3)}\right]_0^{\infty} - \left[-e^{-t_1}\right]_0^{\infty}\right) I_2$$

$$\Gamma(1) = 1 + 0I_1 + 0I_2 = 1$$

In the same way we can proof,

1. $\Gamma(Z(I_1, I_2) + 1) = \big(Z(I_1, I_2)\big)\Gamma\big(Z(I_1, I_2)\big)$
2. $\Gamma(n + mI_1 + pI_2) = (n + mI_1 + pI_2)!\,; n + mI_1 + pI_2 \in N(I_1, I_2)$

Definition 4.1.3.

Like the symbolic 2-plithogenicGamma function, the symbolic 2-plithogenicBeta function is defined by a definite symbolic 2-plithogenicintegral. Its definition is given by

$$B\big(P(I_1, I_2), Q(I_1, I_2)\big) = B\big(p_1 + p_2I_1 + p_3I_2, q_1 + q_2I_1 + q_3I_2\big)$$

$$= \int_0^1 (t_1 + t_2I_1 + t_3I_2)^{(p_1+p_2I_1+p_3I_2)-1} \big(1 - (t_1 + t_2I_1 + t_3I_2)\big)^{(q_1+q_2I_1+q_3I_2)-1}\, d(t_1 + t_2I_1 + t_3I_2)$$

The Beta function can also be defined in terms of the Gamma function:

$$B\big(P(I_1, I_2), Q(I_1, I_2)\big) = \frac{\Gamma\big(P(I_1, I_2)\big).\Gamma\big(Q(I_1, I_2)\big)}{\Gamma\left(\big(P(I_1, I_2)\big) + \big(Q(I_1, I_2)\big)\right)}$$

3. Conclusion

Symbolic 2-plithogenic fractional calculus is a more generalized form of calculus. Unlike the symbolic 2-plithogenicinteger order calculus where operations are centered mainly at the symbolic 2-plithogenicintegers, fractional calculus considers every real symbolic 2-plithogenicnumber, $\boldsymbol{v(I_1, I_2)}$. And as it has been briefly noted in this paper , the meaning and applications of this new type of calculus are quite comparable to those of the ordinary calculus, especially when gets closer and closer to a symbolic 2-plithogenicinteger.In the future, studying the symbolic 2-plithogenic fractional calculus became possible thanks to the definitions mentioned in the paper.

References

1. Abobala, M., "AH-Subspaces in Neutrosophic Vector Spaces", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 6 , pp. 80-86. 2020.

2. Abobala, M.,. "A Study of AH-Substructures in *n*-Refined Neutrosophic Vector Spaces", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 9, pp.74-85. 2020.

3. Sankari, H., and Abobala, M., "Neutrosophic Linear Diophantine Equations With two Variables", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 38, pp. 22-30, 2020.

4. Sankari, H., and Abobala, M." *n*-Refined Neutrosophic Modules", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 36, pp. 1-11. 2020.

5. Alhamido, R., and Abobala, M., "AH-Substructures in Neutrosophic Modules", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 7, pp. 79-86 . 2020.

6. Smarandache, F., " A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic, Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability", American Research Press. Rehoboth, 2003.

7. Suresh, R., and S. Palaniammal,. "Neutrosophic Weakly Generalized open and Closed Sets", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 33, pp. 67-77,. 2020.

8. Olgun, N., and Hatip, A., "The Effect Of The Neutrosophic Logic On The Decision Making, in Quadruple Neutrosophic Theory And Applications", Belgium, EU, Pons Editions Brussels,pp. 238-253. 2020.

9. Hatip, A., Alhamido, R., and Abobala, M., "A Contribution to Neutrosophic Groups", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 0, pp. 67-76 . 2019.

10. Abobala, M., " *n*-Refined Neutrosophic Groups I", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 0, pp. 27-34. 2020.

11. Abobala, M., "Classical Homomorphisms Between n-refined Neutrosophic Rings", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 7, pp. 74-78. 2020.

12. Smarandache, F., " Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)", Neutrosophic Sets and Systems, vol. 53, 2023.

13. Taffach, N., and Ben Othman, K., " An Introduction to Symbolic 2-Plithogenic Modules Over Symbolic 2-Plithogenic Rings", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 54, 2023.

14. Taffach, N., " An Introduction to Symbolic 2-Plithogenic Vector Spaces Generated from The Fusion of Symbolic Plithogenic Sets and Vector Spaces", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 54, 2023.

15. Ali, R., and Hasan, Z., "An Introduction To The Symbolic 3-Plithogenic Vector Spaces", Galoitica Journal Of Mathematical Structures and Applications, vol. 6, 2023.

16. Ben Othman, K., "On Some Algorithms For Solving Symbolic 3-Plithogenic Equations", Neoma Journal Of Mathematics and Computer Science, 2023.

17. Merkepci, H., and Rawashdeh, A., " On The Symbolic 2-Plithogenic Number Theory and Integers ", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 54, 2023.

18. Rawashdeh, A., "An Introduction To The Symbolic 3-plithogenic Number Theory", Neoma Journal Of Mathematics and Computer Science, 2023.

19. Alfahal, A.; Alhasan, Y.; Abdulfatah, R.; Mehmood, A.; Kadhim, M. On Symbolic 2-Plithogenic Real Matrices and Their Algebraic Properties. Int. J. Neutrosophic Sci. 2023, 21.

20. Merkepci, H., "On Novel Results about the Algebraic Properties of Symbolic 3-Plithogenic and 4-Plithogenic Real Square Matrices", Symmetry, MDPI, 2023.

21. F. Smarandache, "Neutrosophic Set a Generalization of the Intuitionistic Fuzzy Sets," *Inter. J. Pure Appl. Math.,* pp. 287-297, 2005.

22. M. Ali, F. Smarandache, M. Shabir and L. Vladareanu, "Generalization of Neutrosophic Rings and Neutrosophic Fields," *Neutrosophic Sets and Systems,* vol. 5, pp. 9-14, 2014.

23. F. Smarandache, Introduction to Neutrosophic Statistics, USA: Sitech & Education Publishing, 2014.

24. Abobala, M., "On Some Special Substructures of Refined Neutrosophic Rings", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 5, pp. 59-66. 2020.

25. Sankari, H., and Abobala, M.," AH-Homomorphisms In neutrosophic Rings and Refined Neutrosophic Rings", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 38, pp. 101-112, 2020.

26. Smarandache, F., " Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)", Neutrosophic Sets and Systems, vol. 53, 2023

27. Ahmed Hatip. (2023). Symbolic 4-Plithogenic Rings and 5-Plithogenic Rings. Symmetry. doi:DOI: 10.3390/sym15081588

28. Ahmed Hatip Mohammad AlsheikhIyadAlhamadeh. (2023). On TheOrthogonality in Real Symbolic 2-Plithogenic and 3-Plithogenic Vector Spaces. Neutrosophic Sets and Systems. doi:zenodo.10031182/10.5281

29. Nader Mahmoud Taffach, Ahmed Hatip. (2023). A Brief Review on The Symbolic 2-PlithogenicNumber Theory and Algebraic Equations. Galoitica Journal Of Mathematical Structures And Applications (GJMSA). doi:DOI: 10.54216/GJMSA.050103

30. Nader Mahmoud Taffach, Ahmed Hatip. (2023). A Review on Symbolic 2-Plithogenic Algebraic Structures. Galoitica Journal Of Mathematical Structures And Applications (GJMSA). doi:DOI: 10.54216/GJMSA.050101

NeutrosophicKnowledge, Vol. 04, 2024
University of New Mexico

Article

Neutrosophic Logic and Paradoxism School

المنطق النيوتروسوفي ومدرسة البارادوكسيزم

Salah Bouzina *

Department of Philosophy, Faculty of Human Sciencses and Social Sciencses, University Constantine 2 Abdelhamid Mehri .

* Correspondence: salah.bouzina@univ-constantine2.dz

Received: 04 07 , 2024; *Accepted:* 04 13, 2024.

الملخص: إن الهدف من هذا البحث أولا هو معرفة العلاقة بين المنطق النيوتروسوفي ومدرسة البارادوكسيزم، وكيف تمكن الأستاذ فلورنتن سمارنداكه من إنشاء نسق منطقي في مدرسة غير منطقية (تقوم على المفارقات) كما سنرى ذلك، أما ثانيا هو معرفة أسباب إنشاء هذه المدرسة من خلال معرفة الحياة الفكرية للأستاذ فلورنتن سمارنداكه، وثالثا هو تبيين أن أي نسق منطقي أو فكري هو في الحقيقة ممارسة فكرية حياتية يومية يعيشها الإنسان، واختلاف هذه الأنساق هو اختلاف في هذه الممارسة باختلاف الثقافة والحضارة.

الكلمات المفتاحية: تناقضات، مفارقات، فلورنتن سمارنداكه، مدرسة، بارادوكسيزم، لاتحديد، المنطق النيوتروسوفي، الحقيقة.

---

1. مقدمة :

تعتبر أول نظرية موضوعة في المنطق من طرف الفيلسوف اليوناني أرسطوطاليس Aristotle والتي هي عبارة عن القوانين الأولى لآلية الاستنتاج الفكرية الفطرية للإنسان خطوة مفيدة لأبعد الحدود لكل من جاؤوا بعده إلى يومنا هذا من إدراك حقيقة هي أن: الكون بكل مظاهر وجوده الفيزيقية والميتافيزيقية هو في الحقيقة عبارة عن هيكل منطقي يحتاج إلى دقة عالية في التجريد لإظهاره، لأن جمال مظاهر الاختلاف وما تحدثه من انطباعات عاطفية في الحس المشترك تُخفي عن العقل كيفية الإدراك الحقيقي لهيكله المنطقي. وكثير من المفكرين والفلاسفة انتبهوا إلى هذا الأمر وهو ما تُجسده كثرة واختلاف الأنساق والمرجعيات المنطقية والرياضية في مختلف مجالات العلم. ولكن على رغم من اختلاف أنساقهم ومبادئهم إلا أنهم يتفقون على أن هناك نوعا من الكيانات لا يمكن تحديدها بدقة كعناصر أو كمجموعات، وبالتالي لا يمكن وضع منطق لها ويطلقون عليها اسم الكيانات غير المحددة أو الكيانات الغامضة، إلا أن هناك من المفكرين من اجتهد لوضع منطق لمثل هذه الكيانات غير المحددة والغامضة في الكون

أبرزهم وأكثرهم شهرة حاليا الأستاذ فلورنتن سمارنداكه Florentin Smarandache، الذي وضع سنة 1995م انطلاقا من مدرسته البارادوكسيزم Paradoxism، نسقا منطقيا سمّاه بـــ: المنطق النيوتروسوفي Neutrosophic Logic، نسق يتعامل مع هذه الكيانات غير المحددة الغامضة وذلك بمنحها درجة انتماء غموض (درجة انتماء لاتحديد). وبعدها سعى إلى تعميم هذا النسق المنطقي وتطبيقه في مختلف مجالات العلم من رياضيات وفيزياء وغيرها من العلوم الكمية وحتى في الفلسفة والعلوم الإنسانية والعلوم الاجتماعية، وهدفه في ذلك هو تبيان الجوانب غير المحددة والغامضة بدقة في كل مجال علمي ومعرفي، وأيضا في كل علم كمي أُعتقد لعقود من الزمن أنه دقيق ويقيني ولا يحتوي على الغموض في نتائجه.

السؤال المطروح هنا: ما هي مدرسة البارادوكسيزم؟ وما هي إسهامات الأستاذ فلورنتن سمارنداكه منها؟ وكيف يكون المنطق النيوتروسوفي من هذه الإسهامات؟

قبل الإجابة عن هذه الأسئلة يجب أن نتعرّف أولا على الحياة الفكرية للأستاذ فلورنتن سمارنداكه التي كانت الملهم الأساسي له في إنشاء مدرسته البارادوكسيزم، إذن كيف عاش الأستاذ فلورنتن سمارنداكه فترة حياته الفكرية؟

2. الحياة الفكرية للأستاذ فلورنتن سمارنداكه [2] Florentin Smarandache:

عاش الرياضي والفيزيائي والأديب والشاعر والروائي والرسام التجريبي والفيلسوف، الذي وُلد بمدينة بالسيستي Balcesti مقاطعة فلوسيا Valcea بـــ رومانيا Romania في يوم: 10 ديسمبر سنة 1954م، وتخرّج من قسم الرياضيات وعلم الحاسوب بجامعة كريوفا Craiova سنة 1979م، ثم حصل على درجة الدكتوراه في الرياضيات من جامعة كيشينيف Kishinev سنة 1997م. الأستاذ فلورنتن سمارنداكه فترة حياته الفكرية المُبكرة في ظل نظام الحكم الشيوعي لرومانيا، حيث النزعة الشمولية، وسياسة القبضة الحديدية التي مارسها الرئيس نيكولاي تشاوشيسكو Nicolae Ceausescu، إبان فترة حكمه من سنة 1918م إلى سنة 1989م، لاسيما خلال حقبة الثمانينيات، والتي شهدت صراعا مع السلطة، هذا الصراع قاده عدد من المفكرين والعلماء، وكان الأستاذ فلورنتن سمارنداكه في مقدمتهم، ولقد بلغ هذا الصراع أوجه حين أضرب عن الطعام سنة 1986م، لحرمانه من حضور المؤتمر الدولي للرياضيات بجامعة باركلي Berkely في كاليفورنيا، وحينئذ نشر خطابا في: "ملاحظات الجمعية الرياضية الأمريكية" عن حرية التنقل للعلماء، وأصبح بالتالي منشّقًا. وكنتيجة لذلك ظل عاطلا عن العمل لمدة سنتين تقريبا، يعيش من ممارسة الدروس الخصوصية لبعض الطلاب.

فّر الأستاذ فلورنتن سمارنداكه من رومانيا في سبتمبر سنة 1988م، وضل قرابة سنتين في معسكرات اللاجئين السياسيين بتركيا Turky ، حيث فرضت عليه طبيعة الحياة القاسية في تلك المعسكرات أن يمارس أعمالا دون المستوى: كنّاس، نقّاش، ...، وغيرها، لكنه بقي على اتصال بمعاهد الثقافة الفرنسية التي يسّرت له الحصول على الكتب وإقامة بعض العلاقات مع الشخصيات المختلفة، وقبل فراره من رومانيا دفن بعض مخطوطاته في حقل أبويه داخل صندوق معدني بجوار شجرة خوخ، و لم يستردها إلا بعد مرور أربع (04) سنوات، وثمّة مخطوطات أخرى حاول إرسالها بالبريد إلى مترجم في فرنسا، لكنها صودرت من قبل الشرطة السرية و لم يستطع اقتفاء أثرها، وأخرى حاول تهريبها خارج رومانيا عن طريق مدرسة بوخارست الفرنسية وبعض السياح فضلت طريقها.

في مارس سنة 1990م هاجر إلى الولايات المتحدة الأمريكية حيث واصل دراسات ما بعد الدكتوراه بجامعات أمريكية مختلفة، كجامعة فونكس Phoenix، وجامعة تكساس Texass، ...، وغيرها، وفي غضون ذلك عمل كمهندس برمجيات لشركة هونيويل Honeywell من سنة 1990م إلى سنة 1995م، وعمل كأستاذ ملحق بكلية بيما Pema للجالية من سنة 1995م إلى سنة 1997م، ثم عمل كأستاذ مساعد بجامعة نيومكسيكو New Mexico سنة 1997م، إلى أن رُقّي فيها إلى درجة أستاذ مشارك للرياضيات سنة 2003م.

عُرف الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بغزارة إنتاجه في مختلف الميادين، وذلك منذ وصوله إلى الولايات المتحدة الأمريكية، حيث نشر أكثر من تسعين (90) كتابا في مختلف المجالات، تُرجم معظمها إلى العديد من اللغات، كما كتب آلاف الصفحات كمذكرات حول حياته. وعُرف الأستاذ فلورنتن سمارنداكه دُوليا كزعيم لمدرسة أدبية تسمى بـــ: الباردوكسيزم Paradoxism، وانطلاقا من هذه المدرسة تعددت إسهامات الأستاذ فلورنتن سمارنداكه في مجالات مختلفة. إذن ما هي هذه المدرسة؟

3. تعريف مدرسته الباردوكسيزم Paradoxism :

مدرسة الباردوكسيزم، هي حركة طلائعية في الأدب والفن والفلسفة، والعلم، ...، تعتمد على **توظيف المفارقات** والقضايا المتناقضة في الأعمال الإبداعية المختلفة، وهي مدرسة حديثة النشأة، حيث قام الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بتأسيسها سنة 1980م معتمدا أنساق المنطق الرياضي المعاصر، إلا أنها سرعان ما انتشرت وبات لها العديد من المؤيدين في معظم دول العالم **[2]** ، يقول الأستاذ فلورنتن سمارنداكه في وصف مدرسته الباردوكسيزم: « لقد بدأت مدرسة الباردوكسيزم كحركة اعتراضية مضادة للاحتكارية الإبداعية في مجتمع مغلق (رومانيا الثمانينيات)،

حيث كانت الثقافة بأكملها حكرا على مجموعة صغيرة تحظى برعاية السلطة، كانت أفكارهم ومنشوراتهم هي فقط التي تؤخذ بعين الاعتبار، أما نحن فلم نكن بالكاد ننشر شيئا، حينئذ قلت: فلنشتغل بالأدب ...دون اشتغال به!، فلنكتب ... دون أن نكتب شيئا بالفعل، كيف يكون ذلك؟.

ببساطة إن طيران عصفور ما _في مجال الأدب_ على سبيل المثال يمثل شعرا طبيعيا Natural Poem، لا يستلزم الكتابة، لأنه أكثر حسا وجلاء من أية لغة تُسَّطر فيها بعض العلامات على الورق، لأن هذه الأخيرة تمثل في الواقع شعرا اصطناعيا Artificial Poem مشوها، مصدره ترجمة مُلاحِظ للمُلاحَظ بالترجمة التي نزيفها، كذلك تمثل السيارات الضاجة على الطريق شعرا حضاريا City Poem، وتمثل أهازيج المزارعين في موسم الحصاد شعرا نثريا Pisseminations Poem، وفوق ذلك نستطيع القول أن الحلم بأعين مفتوحة هو شعر سريالي Surrealist Poem، والكلام بعشوائية هو شعر دادي Dadaist Poem، والمحادثة باللغة الصينية لمن يجهلها هي شعر يساري Leftist Poem وتبادل النقاش بين المسافرين في محطة القطار حول موضوعات مختلفة هو شعر بعد عصري Post-modern Poem.

وهناك أيضا تصنيفات عمودية: لنقل شعر مرئي Visual Poem، شعر صوتي Sonorour Poem، شعر شمي Olfactory Poem، شعر ذوقي Taste Poem، شعر لمسي Tactile Poem.

وأيضا تصنيفات قطرية: لنقل شعر ظاهرة Poem-phenomenom، شعر حالة (نفس) Poem-Status (Soul)، شعر شيء Poem Thing.

كذلك الحال بالنسبة لفنون الرسم، والنحت، إذ هي بأكملها موجودة في الطبيعة قائمة بالفعل، لقد كنا إذا نمارس احتجاجا صامتا!.

لقد اعتمدت في تأسيس المدرسة على التناقضات Contradictions، لماذا؟ لأننا عشنا في ذلك المجتمع حياة مزدوجة: حياة رسمية معلنة من قبل النظام السياسي وأخرى واقعية، لقد أعلنت وسائل الإعلام أن حياتنا رائعة، لكن حياتنا في الواقع كانت مأساوية إن المفارقة تزدهر! وعلى هذا فقد تناولنا الإبداع بسخرية بمعنى معكوس، بطريقة توفيقية، وهكذا وُلدت مدرسة البارادوكسيزم، لقد كانت النُكت الفولكلورية _التي راجت في عهد تشاوشيسكو كمتنفس عقلي_ مصادر إلهام رائعة لنا» **[4]**. بعد أن عرفنا ما هي هذه المدرسة، إذن فما هي مجالات إسهام الأستاذ فلورنتن سمارنداكه من خلالها؟

4. مجالات إسهام الأستاذ فلورنتن سمارنداكه من خلال مدرسة البارادوكسيزم:

1.4. في مجال الأدب:

كانت له العديد من التجارب الشعرية، كما حرّر ثلاث مجموعات دولية (نثرية وشعرية) عن البارادوكسيزم من سنة 2000م إلى سنة 2004م، بها نصوص لما يقارب من 350 كاتب حول العالم بمختلف اللغات، ولعل أبرز أعماله في هذا الصدد هي مسرحية ألفها بعنوان: (ما وراء التاريخ Meta History سنة 1993م)، وحصل بها على جائزة مهرجان كزابلانكا المسرحي الدولي International Theatrieal Festival of Casablanca سنة 1995م، كما رُشح الأستاذ فلورنتن سمارنداكه لجائزة نـــوبـــل في الأدب سنة 1999م. **[2]**

2.4. في مجال الرياضيات:

قدّم مفهوم (درجة النفي The Degree of Negation) لأية بديهية أو مبرهنة في هندسة سمارنداكه Smarandashe Geometry، كما قدم أيضا مفهوم (البنية المتكثرة The Multi-Structure)، وقدم أيضا مفهوم (المكان المتكثر Multi-space) وهو تأليف من الأماكن غير المتجانسة Heteroyeneous Spaces، وابتكر أيضا العديد من المتتاليات Sequences، والدوال Functions في نظرية العدد Number Theory، وعمّم المجموعة الضبابية Fuzzy Set ومشتقاتها وأطلق عليها إسم (المجموعة النيوتروسوفية Neutrosophic Set)، وكذلك عمّم المنطق الضبابي Fuzzy Logic ومشتقاته وأطلق عليه إسم (المنطق النيوتروسوفي Neutrosophic Logic)، وعلى خلفية هذا الإبداع الرياضي قام الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بتنظيم المؤتمر الدولي الأول عن الأنساق النيوتروسوفية Neutrosophic Systems، بجامعة نيومكسيكو New Mexico في الفترة الممتدة من: 01 إلى 03 ديسمبر سنة 2001م، ومنذ سنة 2002م يعمل الأستاذ فلورنتن سمارنداكه بالاشتراك مع الرياضي الفرنسي الأستاذ (جون ديزرت Jean Dezert) على تطوير نظرية (ديمبستر–شافير Dempster-Shafier Theory) ويرمز لها بالرمز: DST، إلى نظرية جديدة في الاندماج البارادوكسي تحمل إسم نظرية (ديزرت–سمارنداكه Dezert-Smarandashe Theory) ويرمز لها بالرمز: DSmT، وفي سنة 2004م صمّم خوارزمية Algorithm لتوحيد نظريات وقواعد الاندماج UFT المستخدمة في نظم المعلومات الحيوية Bioinformatics، والروبوتات Robotics، والأنساق العسكرية Military، حصل على جائزة نيومكسيكو لأفضل كتاب سنة 2011م، وذلك عن كتابه "بُنَى جبرية جديدة New Algebraic Structures"، مناصفة مع الأستاذة: د.فاسانثا كانداسامي W.B. Vasantha Kandasamy. **[2]**

3.4. في مجال الفيزياء:

اكتشف الأستاذ فلورنتن سمارنداكه سلسلة من المفارقات في مجال فيزياء الكوانتم Physic Quantic، وصاغ الفرض القائل بأنه ليس ثمة حد أقصى للسرعة في الكون، وهو الفرض الذي أثار ولا يزال يثير جدلا واسعا بين العلماء، لاسيما وأنه يناقض نظرية أينشتاين Einstein في النسبية الخاصة Special Theory of Relativity، كذلك افترض إمكانية وجود شكل آخر من أشكال المادة Matter سماه بـــ: اللامادة Unmatter، وهو عبارة عن تأليف بين المادة ونقيض المادة Antimatter، أو نقول هو تأليف بين الكواركات Quarks ونقيض الكواركات Antiquarks ، في 22 أفريل 2011م، قام الباحثون في المنظمة الأروبية للأبحاث النووية (سِيرَن) بالإثبات الجُزئي لفرضيته، التي تَنُصْ على أنه لا يوجد حد أقصى للسرعة في الكون. **[2]**

4.4. في مجال الفلسفة:

قدم الأستاذ فلورنتن سمارنداكه سنة 1995م **[6]** نظريته: النيوتروسوفيا Neutrosophy، وهي أساس كل أبحاثه، في الأدب، في الرياضيات، في الفيزياء، ...، وغيرها، والتي جوهرها هو المنطق النيوتروسوفي. **[2]**

بعد أن عرفنا ما هي هذه المدرسة وما هي أهم إسهامات الأستاذ فلورنتن سمارنداكه من خلالها، إذن كيف وضع الأستاذ فلورنتن سمارنداكه المنطق النيوتروسوفي من خلال مدرسة البارادوكسيزم ؟

5. المنطق النيوتروسوفي ومدرسة البارادوكسيزم:

لاحظنا في العنصر (03) من هذه المقالة أنّ الأستاذ فلورنتن سمارندكه قد لخّص لنا ما هي مدرسته البارادوكسيزم وظروف نشأتها، فرأينا أنها عبارة عن حركة نشأة في وسط مجتمع مليء بالمفارقات وهذا في قوله: «... عشنا في ذلك المجتمع حياة مزدوجة: حياة رسمية معلنة من قبل النظام السياسي وأخرى واقعية، لقد أعلنت وسائل الإعلام أن حياتنا رائعة، لكن حياتنا في الواقع كانت مأساوية، إن المفارقة تزدهر**!**...».

وأيضا نلاحظ أن هذه المدرسة تستخدم المفارقات في أعمالها الإبداعية، وهذا في قوله: «...حينئذ قلت: فلنشتغل بالأدب... دون اشتغال به**!**، فلنكتب ...دون أن نكتب شيئا بالفعل...»، ومن هذه الأعمال الإبداعية للمدرسة المنطق النيوتروسوفي.

إذن كيف يكون المنطق النيوتروسوفي عملا إبداعيا من أعمال مدرسة البارادوكسيزم؟ أي كيف يمكن أن يكون المنطق النيوتروسوفي نتاج مدرسة تقوم على التناقضات؟ بتعبير آخر كيف نتج نسق منطقي من مدرسة غير منطقية (تستخدم المفارقات)؟

للإجابة عن هذا الاستفهام فلنتأمل في كلام الأستاذ فلورنتن سمارنداكه السابق، **من قوله:** « ...في رومانيا خلال فترة الثمانينيات... **إلى قوله:** ...تمثل أهازيج المزارعين في موسم الحصاد شعرا نثريا Pisseminations Poem...».

من هذا المثال حول طيران العصافير وغيره نلاحظ أن الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه تنبّه إلى حقيقة هي أن أي **كيان** من صنع الإنسان في هذا العالم له جانب **نقيض له** وجانب أو جوانب **حيادية** تمثل الحقيقية، فبين الفكرة ونقيض الفكرة جانب **حيادي** يمثل الحقيقة التي لا يختلف حولها اثنان.

لنتأمل قوله: فلنشتغل بالأدب دون اشتغال به! فلنكتب دون أن نتكتب!.

نلاحظ أن كلامه هذا عبارة عن **مفارقة**، فكيف يمكن أن أشتغل دون أن أشتغل؟ وكيف يمكن أن أكتب دون أن أكتب؟، التَلفُظ بالمفارقة أمر سهل لكن من الصعب ومن المستحيل تطبيقها.

الآن لنتأمل في قوله أيضا: ببساطة إن طيران عصفور ما يمثل شعرا طبيعيا، لا يستلزم الكتابة، لأنه أكثر حسا وجلاء من أية لغة تسطّر فيها بعض العلامات على الورق، لأن هذه الأخيرة تمثل شعرا اصطناعيا مشوها، مصدره ترجمة مُلاحِظ للمُلاحَظ بالترجمة التي نزيفها.

نلاحظ أن كلامه هذا هو حل للمفارقة: أكتب دون أن أكتب! كيف ذلك؟.

في الحقيقة عند قراءتنا لأي قصيدة شعرية تُصور لنا طيران العصافير يحصل لنا أمران أولهما: هو تخيل مشهد طيران العصافير في الطبيعة، وثانيهما: هو شعورنا بذلك المشهد الذي نتخيله، لكن عند ذهابنا مباشرة إلى الطبيعة لرؤية طيران العصافير فنحن أولا نرى مباشرة المشهد الطبيعي لطيران العصافير ولا نصنعه بتخيلنا، وثانيا: نشعر مباشرة بتلك اللحظات التي نعيشها وليس شعورا مصطنعا من تخيلنا.

إذن:

$$\text{القصيدة المكتوبة}\Big(\text{الكتابة}\ \big(\text{الجانب الأول ،الكيان}\big)\Big) \leftarrow \text{تخيل و شعور مصطنع}$$
$$\text{لا توجد قصيدة مكتوبة}\Big(\text{لا كتابة}\ \big(\text{الجانب الثاني ،نقيضه}\big)\Big) \leftarrow \text{لا تخيل و لا شعور}$$
$$\Big\} \leftrightarrow \text{جانبي النقيض}$$

$$[\text{الذهاب إلى الطبيعة}\big(\text{الجانب الثالث،محايده}\big) \leftarrow \text{المشهد الحقيقي و الشعور الحقيقي}] \leftrightarrow \text{جانب حيادي}$$

ومنه مثل ما رأينا في القصيدة أن لها جانبا حياديا حقيقيا والذي يمثل حلا للمفارقة فكذلك الأمر نفسه بالنسبة لأي كيان يشكل مفارقة من صنع العقل الإنساني.

إذن وكما سبق أن تعرّفنا في مقالة سابقة في العدد (03) من هذه المجلة (Neutrosophic Knowledge) على الروابط الإبستيمولوجية التي استلهم منها الأستاذ فلورنتن سمارنداكه فكرة اللاتحديد **[1]** ، وربطه لهذه الروابط الإبستيمولوجية مع اكتشافه للجانب

الثالث الحيادي لحل المفارقة كما رأينا هذا الآن في مدرسته البارادوكسيزم، تمكن من وضع مبدأ للمنطق النيوتروسوفي، إذن ماهو مبدأ المنطق النيوتروسوفي؟

6. مبدأ المنطق النيوتروسوفي:

مثل أي نظرية أو نسق فكري منطقي، يَجب أن يكون له مُنطلق، أو رَكيزة، أو لنقل مَبدأ يَضعه صاحبه ليؤسس عليه بقية ما جاء في نظريته، وهو كالآتي**[3]**:

لنفرض أن (A) هي: كيان سواء كان: فكرة، قضية، نظرية، حدث، رأي، مبدأ تصور، ...، الخ، وأن $(Non-A)$ هي: نفي ـليس ـ (A)، وأن $(Anti-A)$ هي: نقيض (A)، ولنفرض أن $(Neut-A)$ هي: حياد (A)، ونعني بها ما لا هو (A)، ولا هو $(Anti-A)$، وإنما ما يقع بينهما، ولنفرض كذلك أن $(\grave{A})$ هي: مشتقة (A)

ملاحظة:

إن $(Non-A)$ ليست هي $(Anti-A)$

مثال:

ليكن لدينا الكيان (A) هو اللون الأبيض، نجد أن:

إذا كانت $(A) =$ أبيض، كانت $(Anti-A) =$ أسود، وكانت $(Non-A) =$ أخضر، أحمر، أزرق، أصفر، أسود، ...، الخ، أي كل الألوان ماعدا اللون الأبيض وكانت $(Neut-A) =$ أخضر، أحمر، أزرق، أصفر، ...، الخ، أي كل الألوان ماعدا اللونين الأبيض والأسود، وكانت $(\grave{A}) =$ أبيض قاتم، ...، وغيرها من درجات اللون الأبيض.

من هذا المثال نلاحظ أن **[3]**:

$(Neut-A) \Leftrightarrow \big(Neut(Anti-A)\big)$ ، أي أن الحالات المحايدة لـــ: (A) ، هي الحالات المحايدة نفسها لـــ: $(Anti-A)$.

وأيضا نلاحظ أن: $(Anti-A) \subset (Non-A)$، و: $(Neut-A) \subset (Non-A)$

ونلاحظ أيضا أن: $(A) \cap (Anti-A) = \emptyset$، و: $(A) \cap (Non-A) = \emptyset$ ومنه فإن القضايا: (A) و$(Neut-A)$ و$(Anti-A)$، تمثل مجموعات نيوتروسوفية جزئية Neutrosophic Sets منفصلة اثنان باثنين:

أي أن $(Neut-A)$ و$(Neut(Anti-A))$ منفصلة عن كل من (A) و$(Anti-A)$، أما $(Non-A)$ فتمثل المجموعة النيوتروسوفية الجزئية المكملة لـــ (A) وأيضا (A) تمثل المجموعة النيوتروسوفية الجزئية المكملة لـــ $(Non-A)$، في المجموعة النيوتروسوفية الشاملة (U). **[3]**

حيث عمل الأستاذ فلورنتن سمارنداكه عند اكتشافه لهذا المبدأ، على بناء (خلق) نسق منطقي أكسيوماتيكي جديد، سماه بـــالمنطق النيوتروسوفي، وعنه يقول: «المنطق النيوتروسوفي Neutrosophic Logic، هو نسق منطقي غير كلاسيكي Non-classical logic، وهو كذلك نسق منطقي رياضي متعالي Transcendental معاصر لا متناهي القيم، وأعتبره **نسق الأنساق**». **[5]**

بعد تعرّفنا على كل ما سبق ذكره عن المنطق النيوتروسوفي يتضح أنه نسق يسعى إلى قياس اللاتحديد في أي مجال معروف بذلك أو غير معروف به، إذن ما هو هدف المنطق النيوتروسوفي من قياس اللاتحديد؟ أو ما هو الهدف من المنطق النيوتروسوفي؟.

7. الهدف من المنطق النيوتروسوفي:

إنّ الهدف الأساسي من المنطق النيوتروسوفي هو **اكتشاف الحقيقة**، التي لم تُكتشف بعد حسب رأي الأستاذ فلورنتن سمارنداكه، وذلك لأن الأنساق المنطقية الإنسانية المعروفة حتى الآن ليست دقيقة لتتمكن من اكتشافها، ويرجع سبب عدم دقتها إلى عدم دقة المعرفة التي يتلقاها الإنسان من العالم الخارجي لأنه عالم غامض غير دقيق مليء بالكيانات غير المحددة –وهذه الأنساق لا تستطيع أن تتلقى منه سوى ما هو دقيق فقط– حيث يؤدي عدم دقة المعرفة الصادرة منه إلى الشك في أي قرار متخذ أو نتيجة مستخلصة حول الحقيقة، وذلك لأن هذه الأنساق لا تستطع تحصيل معرفة كاملة حول العالم الخارجي وهذا بسبب ملاحظاتها غير التامة، الأخطاء الكمية في القياس، الأخطاء المصاحبة دوما لاكتساب المعرفة، الرؤية المحدودة لهذه الأنساق، والجهل بالمجموع الكلي للمعرفة الـــمُلاحظة **[5]**. ومن هذه الأنساق مثلا: نظرية الاحتمالات Probability Theory التي تعالج لا يقين كيانات النمط العشوائي الذي تقدمه الصدفة Chance، والعيب فيها أنّ لا يقين الصدفة يتضح إلا من خلال الزمن، أو من خلال وقوع الحوادث، ومن ثمّ فدّقة نظرية الاحتمالات مرتبطة بتكرار وقوع الحوادث، ومن هذه الأنساق أيضا نجد أكثرها شُهرة نظرية المنطق الضبابي Fuzzy Logic الذي يعالج الكيانات غير المحددة والمفتقرة للدقة والوضوح، وذلك بمنح كيان معين درجة في الصدق ودرجة في الكذب، والعيب فيها أيضا أنها تحدّد درجة اللاتحديد والغموض من داخل مجالي الصدق والكذب فقط وليس من مجال خارجهما، وهذه هي نقطة ضعفها، لذلك يضيف الأستاذ فلورنتن سمارنداكه مجال جديد إلى هذين المجالين الكلاسيكيين يسميه بـــ: مجال اللاتحديد، وهذا المجال هو ما يسمح لنا بمنح كيان معين درجة لا تحديده (أي درجة غموض هذا الكيان)، وهذا بالإضافة إلى درجة صدقه ودرجة كذبه، ومنه وبإضافة

الأستاذ فلورنتن سمارنداكه لهذا المجال يقترح المنطق النيوتروسوفي كنسق منطقي جديد يمكن أن يستوعب كل أنواع المعرفة الغامضة وغير الدقيقة وأيضا الدقيقة من العالم الخارجي، **والهدف** من ذلك هو محاولة اكتشاف الحقيقة، وفي هذا يقول: «كخيار بديل للأنساق المنطقية الموجودة، نقترح المنطق النيوتروسوفي بهدف تمثيل نموذج رياضي للايقين، والغموض، والإبهام، وعدم الدقة واللامحدود، واللامعروف، وعدم الاكتمال، وعدم الاتساق، واللغو Redundancy والتناقض».**[5]**

بعد تعرّفنا على الهدف من وضع المنطق النيوتروسوفي، اتضّح أنّ هدفه هو الوصول إلى الحقيقة التي عجزت الأنساق المنطقية السابقة عن الوصول إليها، والآن بقي لنا أن نسأل إن كان لهذا النسق المنطقي تطبيقات على أرض الواقع؟

8 .أهم بعض تطبيقات المنطق النيوتروسوفي:

إنّ من أهم مجالات تطبيق المنطق النيوتروسوفي هو مجال الإعلام الآلي وكل شُعَبِه، وخصوصا علم البرامج الحاسوبية وبرمجة الروبوتات Robots. حيث نجد الروبوت يتلقى عن طريق أجهزة الاستشعار Multi-Sensors معلومات كثيرة ومتناقضة فيما بينها من الوسط الخارجي، وعليه معالجتها لكي يصل إلى قراءة معينة، أو لاتخاذ قرار معين، مثلا: في التطبيقات العسكرية لتتبع الهدف، في الطب لمعالجة الصور الطبية المتضاربة فيما بينها، في الجغرافيا لجمع وتمييز صور الأراضي الزراعية التي ترسلها الأقمار الصناعية، ...، الخ، ولكن كون هذه المعلومات المتناقضة والمتضاربة لا تسمح للروبوت باتخاذ أي قرار، فقد لجأ العلماء إلى ابتكار عدّة أنظمة تسمح لهم وللروبوت بدمج هذه المعلومات المتناقضة والوصول إلى قرار، ومن بين هذه الأنظمة، نجد مثلا: علم السيبرنطيقا Cybernetics، ونظرية ديمبستر–شافير Dempster-Shaffer، ونظرية دوبوا–برادي Dubois-Prade، ونظرية سميتز Smets المسماة: نموذج الاعتقاد القابل للتحويل Transferable Belief Model ورمزها (TBM)، ونظرية ياجر Yager في الحقائب والحقائب الضبابية Bags and Fuzzy Bags، ونظرية الأستاذ لطفي زاده Lotfi A.Zadeh في المجموعات الضبابية Fuzzy Sets، ...، الخ، ولكن على الرغم من وجود ووفرت هذه الأنظمة بقيت المعلومات التي يتلقاها الروبوت تبدو متناقضة في كثير من الأحيان بدرجة تزيد أو تقل، وكذلك الحال حتى ظهرت خلال النصف الثاني من القرن العشرين إحدى النظريات التي تسمح بمعالجة ودمج أكبر وأكثر عدد من المعلومات المتناقضة بشدّة، وهي نظرية ديزرت–سمارنداكه في الاستنتاج المقبول ظاهريا والمتناقض لدمج البيانات Dezert-Smarandache Theory of Plausible and Paradoxist Reasoning for Data Fusion، ويرمز لها بـــ: (DSmT)، وقد وضعها ويعمل على تطويرها كل من الأستاذ فلورنتن سمارنداكه، والأستاذ جان ديزرت Jean Dezert من أونيرا ONERA وكالة أبحاث الفضاء الجوية الفرنسية في باريس French

Airspace Research Agency in Paris. وهذه النظرية هي تطوير لنظرية ديمبستر–شافير Dempster-Shaffer، حيث قاما بدمجها بالمنطق النيوتروسوفي، وهو ما أدى إلى خلق النظرية الجديدة: (DSmT) سنة 2001م، وهي أعلى مستوى من سابقتها وأعلى كفاءة منها في معالجة المعلومات المتناقضة بشدّة، إلى درجة الوصول تقريبا إلى 0% من التناقض.**[5]** كانت هذه النظرية هي من بين أهم تطبيقات المنطق النيوتروسوفي حتى الآن حيث حظيت هذه النظرية بفضل المنطق النيوتروسوفي بترحيب العلماء، وذلك بإقامة مؤتمرات الدولية حولها لمناقشتها وتحسينها، وفي هذا يقول الأستاذ فلورنتن سمارنداكه: «منذ سنة 2003م وحتى الآن ونحن نشارك سنويا في المؤتمرات الدولية المخصصة لدمج المعلومات، حيث نُظمت مؤتمرات في ذلك في كل من: أستراليا Australia، السويد Sweden، الولايات المتحدة الأمريكية USA، إيطاليا Italy، على التوالي، وفضلا عن ذلك كنا ولا زلنا نعمل تحت رعاية مؤسسة ماركوز إيفانس Marcus Evans Inc لتقديم بحوث عن نظرية ديزرت–سمارنداكه، لكل من إسبانيا Spain، وبلجيكا Belgium».**[5]**

9. الخاتمة:

لقد سمحت لنا هذه الدراسة باستخلاص النتائج الآتية:

1.9. إنّ انتهاج الرئيس الروماني نيكولاي تشاوشيسكو إبان فترة حكمه (1918م – 1989م) لسياسة القبضة الحديدية، وممارسته الحرمان والتهميش ضد المفكرين والعلماء منهم الأستاذ فلورنتن سمارنداكه، هو الأمر الذي دفعهم إلى الإبداع والتفلسف وإنارة طريق آخر في التفكير البشري، وهنا نستحضر قول الفيلسوف إيمانويل كانط: «الفلسفة عمل تنويري»، حيث قام الأستاذ فلورنتن سمارنداكه باغتنام هذا الجو السياسي المليء بالمفارقات، فأنتج مدرسة إبداعية جديدة وهي مدرسة البارادوكسيزم، التي تستخدم هذه المفارقات بإبداع في كل المجالات لتغيير ولو جزء من الواقع، حيث تُوِجت الأعمال الإبداعية لهذه المدرسة باكتشاف نوع آخر من أنواع المنطق الترانسندنتالي، وهو المنطق النيوتروسوفي، وهنا نرى حقيقة الفيلسوف الحقيقي الذي لا يأبه لظروف مجتمعه سواء كانت تسمح له بالتفلسف أو لا تسمح، فهو يتفلسف رغم كل الظروف، وهنا نستحضر قول الفيلسوف برتراند راسل: «الفلاسفة نتائج وأسباب، إنهم نتائج ظروفهم السياسية والاقتصادية والاجتماعية، وهم أسباب لتغييرها إن أسعفتهم الظروف».

2.9. إن أي نسق منطقي قبل أن يكون نظاما من الرموز والقوانين، هو في الحقيقة ممارسة فكرية حياتية يومية يعيشها الإنسان، واختلاف أنواع الأنساق المنطقية هو اختلاف في طريقة هذه الممارسة الفكرية باختلاف الثقافة والحضارة، لذلك نحن قمنا بتقديم الحياة الفكرية للأستاذ فلورنتن سمارنداكه، حتى نتمكن من إدراك حقيقة أن الأنساق المنطقية المختلفة هي في الحقيقة حدس عقلي لتجربة معاشة يضعها أصحابها على شكل نسق

منطقي بعدما يشعرون بها ويُدركون علاقاتها، وعن نسق المنطق النيوتروسوفي ومبدعه الأستاذ: فلورنتن سمارنداكه، يقول الأستاذ محمد توفيق الضوي، أستاذ الفلسفة بقسم الفلسفة بكلية الآداب، جامعة المنوفية، الإسكندرية، مصر: «هي رؤية خاصة لنسق فلسفي منطقي، ونظام حياة نبع من مواقف متشابكة استمدها الفيلسوف من واقعه الاجتماعي الفريد وعلاقته بدولته الأصلية ونظامها السياسي ــدولة رومانياــ ومعارفه وهواياته ودراسته الفلسفة وعلم الرياضيات، لم ينظر للحياة نظرة أحادية البعد بل نظرة شاعر وفيلسوف وعالم رياضيات، لذلك جاءت نظريته مترعة بمعان متعددة ورؤى جديدة منها ما هو نسيج ذاتي خالص، ومنها ما هو تحليل منطقي دقيق، ولذلك تنساب أفكاره مفعمة بتجاربه وخبراته وتأثره بتركيبه النفسي والوجداني، فهو يحمل روح الشاعر المتأمل المتعقل، وروح الفيلسوف العاطفي الرقيق، كل ما بالكون يحرك ساكنه ويؤثر فيه، فيترك في أعماقه أثرا باقيا فيخرجه بعد ذلك لحنا أبديا دائم العزف، وهذا ما ينعكس على نظريته الفلسفية النيوتروسوفيا».**[2]**

3.9. إن مسألة البحث عن الحقيقة هي مسألة قديمة بقدم الإنسان، أو يمكن القول إن هذه المسألة هي جزء من أجزاء الفطرة الإنسانية السليمة، ويُعد بحثه عنها سببا من أسباب سعادته وراحته العقلية، ولكن للأسف هذا العالم الذي نعيش فيه وطبيعة تركيبه الغامضة غير المحددة هي ما يقف أمام الإنسان كحاجز يمنعه من الوصول إلى الحقيقة ولقد أدرك بعض العلماء هذا الأمر ومنهم فيلسوفنا الأستاذ فلورنتن سمارنداكه الذي وضع كما رأينا نسقا منطقيا نستطيع باستعماله تجاوز كل أنواع حواجز الغموض واللاتحديد والهدف من ذلك هو الوصول إلى الحقيقة بأي طريقة. لكن يجب أن نتنبه هنا لمسألة هي هل للوصول إلى الحقيقة يجب تخطي غموض ولاتحديد العالم فقط؟

10- قائمة المراجع:

[1]- صالح بوزينة، **الروابط الإبستيمولوجية المساعدة في ظهور المنطق النيوتروسوفي عند فلورنتن سمارنداكه**، مجلة Neutrosophic Knowledge ، العدد (3)، جامعة نيوميكسيكو، الولايات المتحدة الأمريكية ، سنة 2021م.

[2]- فلورنتن سمارنداكه، صلاح عثمان، **الفلسفة العربية من منظور نيوتروسوفي**، منشأة المعارف، جلال حزي وشركاه، الإسكندرية، مصر، الطبعة الأولى، سنة 2007م.

[3]- Florentin Smarandashe, ***Aunifying field in logic: Neutrosophic logic, neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability and statistics***, American research press Rehoboth, fourth edition, 2005.

[4]- Florentin Smarandach, ***Neutrosophic Logic, Neutrosophy, Neurtrosophic set, Neutrosophic Probability***, third edition, American research press, 2003.

[5]- Florentin Smarandashe, Salah Osman, ***Netrosophy in Arabic Philosophy***, printed in the united states of America, renaissance high press, 2007.

[6]- Charles Ashbacher, ***intoduction to neutrosophic logic***, American Research Press Rehoboth, 2002.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 04*, 2024*
University of New Mexico

Article

On The Symbolic 2-Plithogenic Fractional Calculus

Necati Olgun[1], and Hatice Kahraman[2,]*

[1] Department of Mathematics, Gaziantep University, Turkey 1; olgun@gantep.edu.tr
[2] Department of Mathematics, Gaziantep University, Turkey 1; kahramannhatiice@gmail.com

* Correspondence: kahramannhatiice@gmail.com

Received: 04 13, 2024; *Accepted:* 04 19, 2024.

Abstract: Depending on the geometric isometry (AH-Isometry) the foundation of the symbolic 2-plithogeniccalculuswas established, where new definitions of symbolic 2-plithogenicfractional integration and symbolic 2-plithogenicfractional differentiation were introduced, along with some illustrative examples. Following that, definitions for the symbolic 2-plithogenicgamma function and symbolic 2-plithogenicbeta function were presented to pave the way towards achieving the desired goal, which is symbolic 2-plithogenicfractional 2-Plithogenic Calculus.

Keywords: Symbolic 2-PlithogenicFractionalIntegration,Symbolic 2-PlithogenicFractionalDerivative,Symbolic 2-PlithogenicGamma Function and Symbolic 2-PlithogenicBeta Function.

1. Introduction

Fractional calculus owes its origin to a question of whether the meaning of a derivative to an integer order n could be extended to still be valid when n is not an integer. This question was first raised by L'Hopital on September 30th, 1695. On that day, in a letter to Leibniz, he posed a question about $\frac{d^n x}{dx^n}$, Leibniz's notation for the derivative of the linear function $f(x) = x$. L'Hopital curiously asked what the result would be if $n = \frac{1}{2}$ Leibniz responded that it would be "an apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn," [31]

Neutrosophy is a new branch of philosophy concerns with the indeterminacy in all areas of life and science. It has become a useful tool in generalizing many classical systems such as equations [1,9], number theory [2,3], topology [4,5], linear spaces [6,10], modules [4,5], and ring of matrices [7,8].

In the literature, we find many studies about neutrosophic calculus, where some definitions and properties were presented about neutrosophic real functions and numbers [10].The neutrosophic real functions with one variable were defined only in a special case [11], as follows:

Recently, Abobala and Hatip, have presented the concept of two-dimensional AH-isometry to study the correspondence between neutrosophic plane $R(I) \times R(I)$ and the classical module $R^2 \times R^2$. Also, the one-dimensional AH-isometry between *R(I)* and $R \times R$. This isometry was useful in defining inner products and norms [10], ordering [9], and neutrosophic geometrical shapes [10].

In [12], the concept of symbolic n-plithogenic algebraic structures was proposed by Smarandache, then it was used on a wide range by many researchers to generalize classical algebraic

structures such as modules [13], spaces [14-15], equations [16], and number theory [17-18]. In [19], the concept of symbolic 2-plithogenic matrices was presented with many applications in the theory of algebraic equations and representing functions. Laterally, symbolic 3-plithogenic matrices and 4-plithogenic matrices were studied from many algebraic sides, especially those which are related to the diagonalization problem [20].

In this work, we use the one-dimensional AH-isometry to turn the general case of symbolic 2-plithogenic neutrosophic real functions with one variable into three classical real functions so we will go from $2-SP_R$ space into $R\times R\times R$ space. The definitions of symbolic 2-plithogenic integration and symbolic 2-plithogenic differentiation were introduced.

2. Terminologies

We present here some basic definitions and axioms of neutrosophic logic and refined neutrosophic logic.

Definition 2.1. [21]: Let X be a non-empty fixed set. A neutrosophic set A is an object having the form $\{x,(\mu_A(x),\delta_A(x),\gamma_A(x)):x\in X\}$, where $\mu_A(x)$, $\delta_A(x)$ and $\gamma_A(x)$ represent the degree of membership, the degree of indeterminacy , and the degree of non-membership respectively of each element $x\in X$ to the set A .

Definition 2.2.[22]:Let K be a field, the neutrosophic file generated by $\langle K\cup I\rangle$ which is denoted by $K(I)=\langle K\cup I\rangle$.

Definition 2.3. [23]:Classical neutrosophic number has the form $a+bI$ where a,b are real or complex numbers and I is the indeterminacy such that $0\cdot I=0$ and $I^2=I$ which results that $I^n=I$ for all positive integers n.

Definition 2.4. [25]:Let R be a ring, the symbolic 2-plithogenic ring is defined as follows:

$2-SPR=\{a_0+a_1I_1+a_2I_2;\ a_i\in R, {I_1}^2=I_1, {I_2}^2=I_2,\ I_1\times I_2=I_{max(1,2)}=I_2\ \}$.

Smarandache has defined algebraic operations on $2-SP_R$ as follows:

Addition:

$[a_0+a_1I_1+a_2I_2]+[b_0+b_1I_1+b_2I_2]=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)I_1+(a_2+b_2)I_2$.

Multiplication:

$[a_0+a_1I_1+a_2I_2\ ].[b_0+b_1I_1+b_2I_2\ ]=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1)I_1+(a_0b_2+a_1b_2+a_2b_0+a_2b_1+a_2b_2)I_2$.

Definition 2.5. Let $2-SP_R=\{a+bI_1+cI_2\ ;a,b,C\in R\}$ where

$${I_1}^2=I_1\ ,{I_2}^2=I_2\ and\ I_1I_2=I_2I_1=I_2$$

Be the symbolic 2-plithogenic field of reals. The symbolic 2-plithogenic isometry (AH-Isometry) is defined as follows:

$$T:2-SP_R\to R\times R\times R\ ;\ T(a+bI_1+cI_2)=(a,a+b+c,a+c)$$

Remark 2.6.

1) T is bijective, then it is invertible by:
$$T^{-1}:R\times R\times R\to 2-SP_R\ ;\ T^{-1}(a,b,c)=a+(b-c)I_1+(c-a)I_2$$
2) T preserves distances, i.e.:
$$\|T(AB)\|=T(\|AB\|)$$

Definition 2.7. Let $f:2-SP_R\to 2-SP_R;\ f=f\big(X(I_1,I_2)\big)$ and $X=x+yI_1+zI_2\in 2-SP_R$ the f is called the symbolic 2-plithogenicreal function with the symbolic 2-plithogenicvariable, written as follows:

$$f\big(X(I_1,I_2)\big)=f(x+yI_1+zI_2)=f(x)+\big(f(x+y+z)-f(x+z)\big)I_1+\big(f(x+z)-f(x)\big)I_2$$

Definition 2.8. Let $\boldsymbol{f\big(X(I_1,I_2)\big)}$a symbolic 2-plithogenic function on $\boldsymbol{2-SP_R}$, the we define a derivative of a symbolic 2-plithogenic function $\boldsymbol{f\big(X(I_1,I_2)\big)}$ as follows:

$$f'_{X(I_1,I_2)}\big(X(I_1,I_2)\big)=f'_x(x)+\Big(f'_{x+y}(x+y+z)-f'_{x+z}(x+z)\Big)I_1+\big(f'_{x+z}(x+z)-f'_x(x)\big)I_2$$

Definition 2.9. Let $\boldsymbol{f\big(X(I_1,I_2)\big)}$ a symbolic 2-plithogenic function on $\boldsymbol{2-SP_R}$, the we define a integration of a symbolic 2-plithogenic function $\boldsymbol{f\big(X(I_1,I_2)\big)}$as follows:

$$\int f\big(X(I_1,I_2)\big)\,dX(I_1,I_2)=F\big(X(I_1,I_2)\big)=F(x)+[F(x+y+z)-F(x+z)]I_1+[F(x+z)-F(x)]I_2.$$

Definition 2.10. Let $\boldsymbol{f\big(X(I_1,I_2)\big)}$ a symbolic 2-plithogenic function on $\boldsymbol{2-SP_R}$, we define the definite integration of a symbolic 2-plithogenic function $\boldsymbol{f\big(X(I_1,I_2)\big)}$ as follows:

$$\int_{a+bI_1+cI_2}^{d+eI_1+fI_2} f\big(X(I_1,I_2)\big)dX(I_1,I_2)$$
$$=\int_a^d f(x)dx+\left[\int_{a+b+c}^{d+e+f} f(x+y+z)d(x+y+z)-\int_{a+c}^{d+f} f(x+z)d(x+z)\right]I_1$$
$$+\left[\int_{a+c}^{d+f} f(x+z)d(x+z)-\int_a^d f(x)dx\right]I_2$$

Definition 2.11. The most basic interpretation of the symbolic 2-plithogenicGamma function is simply the generalization of the symbolic 2-plithogenicfactorial for all symbolic 2-plithogenicreal numbers.

We define a symbolic 2-plithogenicGamma function as follows:

$$\Gamma\big(Z(I_1,I_2)\big)=\Gamma(z_1+z_2I_1+z_3I_2)$$
$$=\Gamma(z_1)+\big(\Gamma(z_1+z_2+z_3)-\Gamma(z_1+z_3)\big)I_1+\big(\Gamma(z_1+z_3)-\Gamma(z_1)\big)I_2$$
$$=\int_0^\infty (t_1+t_2I_1+t_3I_2)^{(z_1+z_2I_1+z_3I_2)-1}\,e^{-(t_1+t_2I_1+t_3I_2)}\,d(t_1+t_2I_1+t_3I_2)$$

Definition 2.12. Like the symbolic 2-plithogenicGamma function, the symbolic 2-plithogenicBeta function is defined by a definite symbolic 2-plithogenicintegral. Its definition is given by

$$B\big(P(I_1,I_2),Q(I_1,I_2)\big)=B\big(p_1+p_2I_1+p_3I_2,q_1+q_2I_1+q_3I_2\big)$$

$$=\int_0^1 (t_1+t_2I_1+t_3I_2)^{(p_1+p_2I_1+p_3I_2)-1}\big(1-(t_1+t_2I_1+t_3I_2)\big)^{(q_1+q_2I_1+q_3I_2)-1}\,d(t_1+t_2I_1+t_3I_2)$$

The Beta function can also be defined in terms of the Gamma function:

$$B\big(P(I_1,I_2),Q(I_1,I_2)\big)=\frac{\Gamma\big(P(I_1,I_2)\big).\Gamma\big(Q(I_1,I_2)\big)}{\Gamma\Big(\big(P(I_1,I_2)\big)+\big(Q(I_1,I_2)\big)\Big)}$$

3.Definition of the Riemann-LiouvilleSymbolic 2-plithogenic Fractional Integral

We can start by introducing a succinct notation that will be frequently used. From now on, $\boldsymbol{D^{-v(I_1,I_2)}_{X(I_1,I_2)}f\big(X(I_1,I_2)\big)}$will denote the symbolic 2-plithogenicfractional integration of a symbolic

2-plithogenicfunction $\boldsymbol{f(X(I_1,I_2))}$ to an arbitrary order $\boldsymbol{v(I_1,I_2)}$and $\boldsymbol{v(I_1,I_2)}$ is a symbolic 2-plithogenicpositive real number .

Definition 3.1. Let $\boldsymbol{v(I_1,I_2)}$be a symbolic 2-plithogenicpositive real number. Let $\boldsymbol{f(X(I_1,I_2))}$ be integrable and piecewise continuous on $\boldsymbol{(0,\infty)}$. Then for $\boldsymbol{(I_1,I_2)>0+0I_1+0I_2}$, the Riemann-Liouville symbolic 2-plithogenicfractional integral of $\boldsymbol{f(X(I_1,I_2))}$ of order $\boldsymbol{v(I_1,I_2)}$ is:

$$\boldsymbol{D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)}f(X(I_1,I_2))=\frac{1}{\Gamma(v(I_1,I_2))}\int_0^{X(I_1,I_2)}(X(I_1,I_2)-t(I_1,I_2))^{v(I_1,I_2)-1}f(t(I_1,I_2))\,d(t(I_1,I_2))}$$

Remark3.3. :Let $\boldsymbol{(X(I_1,I_2))}$, $\boldsymbol{X=x+yI_1+zI_2\in R(I_1,I_2)}$ be a symbolic 2-plithogenicreal function with one symbolic 2-plithogenicvariable, thenwe can write:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)}f(X(I_1,I_2))}&=\boldsymbol{D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)}(f(x)+[f(x+y+z)-f(x+z)]I_1+[(f(x+z))-f(x)]I_2)}\\&=\boldsymbol{D_x^{-v(I_1,I_2)}f(x)+\left[D_{x+y+z}^{-v(I_1,I_2)}f(x+y+z)-D_{x+z}^{-v(I_1,I_2)}f(x+z)\right]I_1}\\&+\boldsymbol{\left[\left(D_{x+z}^{-v(I_1,I_2)}f(x+z)\right)-D_x^{-v(I_1,I_2)}f(x)\right]I_2}\end{aligned}$$

Example3.4. : Let's evaluate$\boldsymbol{D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)}X^{w(I_1,I_2)}(I_1,I_2)}$ by definition,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)}X^{w(I_1,I_2)}(I_1,I_2)}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\Gamma(v(I_1,I_2))}\int_0^{X(I_1,I_2)}(X(I_1,I_2)-t(I_1,I_2))^{v(I_1,I_2)-1}(t(I_1,I_2))^{w(I_1,I_2)}d(t(I_1,I_2))}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\Gamma(v(I_1,I_2))}\int_0^{X(I_1,I_2)}\Big(1}\\&\boldsymbol{-\frac{t(I_1,I_2)}{X(I_1,I_2)}\Big)^{v(I_1,I_2)-1}X(I_1,I_2)^{v(I_1,I_2)-1}(t(I_1,I_2))^{w(I_1,I_2)}d(t(I_1,I_2))}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\Gamma(v(I_1,I_2))}\int_0^{1}(1}\\&\boldsymbol{-u(I_1,I_2))^{v(I_1,I_2)-1}X(I_1,I_2)^{v(I_1,I_2)-1}(X(I_1,I_2)u(I_1,I_2))^{w(I_1,I_2)}d(u(I_1,I_2))}\end{aligned}$$

Where $\boldsymbol{\left(u(I_1,I_2)=\frac{t(I_1,I_2)}{X(I_1,I_2)}\right)}$

$$\begin{aligned}&=\boldsymbol{\frac{1}{\Gamma(v(I_1,I_2))}X(I_1,I_2)^{v(I_1,I_2)+u(I_1,I_2)}\int_0^1(1-u(I_1,I_2))^{v(I_1,I_2)-1}(u(I_1,I_2))^{w(I_1,I_2)}d(u(I_1,I_2))}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\Gamma(v(I_1,I_2))}X(I_1,I_2)^{w(I_1,I_2)+v(I_1,I_2)}B(w(I_1,I_2)+1,v(I_1,I_2))}\\&=\boldsymbol{\frac{\Gamma(w(I_1,I_2)+1)}{\Gamma(w(I_1,I_2)+v(I_1,I_2)+1)}X(I_1,I_2)^{w(I_1,I_2)+v(I_1,I_2)}}\end{aligned}$$

We refer to the above example as the symbolic 2-plithogenicPower Rule. The symbolic 2-plithogenicPower Rule tells us that the symbolic 2-plithogenicfractional integral of a constant of order $\boldsymbol{v(I_1,I_2)}$ is

$$D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)} X^{w(I_1,I_2)}(I_1,I_2) = \frac{\Gamma(w(I_1,I_2)+1)}{\Gamma(w(I_1,I_2)+v(I_1,I_2)+1)} X(I_1,I_2)^{w(I_1,I_2)+v(I_1,I_2)}$$

And in particular, if $v(I_1,I_2) = \frac{1}{2} + 0I_1 + 0I_2$,

$$D_{X(I_1,I_2)}^{-\frac{1}{2}+0I_1+0I_2,}[x+xI_1+x^2I_2]^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}[x+xI_1+x^2I_2]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x+xI_1+x^2I_2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{x}+\left[\sqrt{x+x+x^2}-\sqrt{1+x^2}\right]I_1+\left[\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}\right]I_2\right)$$

$$D_{X(I_1,I_2)}^{-\frac{1}{2}+0I_1+0I_2,}[x+xI_1+x^2I_2]^{1+I_1+0I_2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}[x+xI_1+x^2I_2]^{\frac{3}{2}++I_1+0I_2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{(x+xI_1+x^2I_2)^3}$$

$$D_{X(I_1,I_2)}^{-\frac{1}{2}+0I_1+0I_2,}[x+xI_1+x^2I_2]^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}[x+xI_1+x^2I_2]^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{x+xI_1+x^2I_2}$$

Theorem 3.5. Let $\left(X(I_1,I_2)\right)$, $X = x+yI_1+zI_2 \in R(I_1,I_2)$ be a symbolic 2-plithogenicreal function with one symbolic 2-plithogenicvariable. Then for all $v(I_1,I_2), w(I_1,I_2) > 0+0I_1+0I_2$,

$$D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)}\left[D_{X(I_1,I_2)}^{-w(I_1,I_2)} f\left(X(I_1,I_2)\right)\right] = D_{X(I_1,I_2)}^{-(v+w)(I_1,I_2)} f\left(X(I_1,I_2)\right) = D_{X(I_1,I_2)}^{-w(I_1,I_2)}\left[D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)} f\left(X(I_1,I_2)\right)\right]$$

Proof:

By definition of thesymbolic 2-plithogenicfractional integral we have

$$D_{X(I_1,I_2)}^{-v(I_1,I_2)}\left[D_{X(I_1,I_2)}^{-w(I_1,I_2)} f\left(T(I_1,I_2)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(v(I_1,I_2)\right)} \int_0^{T(I_1,I_2)} \left(T(I_1,I_2)\right.$$
$$\left. - X(I_1,I_2)\right)^{v(I_1,I_2)-1}\left[D_{X(I_1,I_2)}^{-w(I_1,I_2)} f\left(T(I_1,I_2)\right)\right] d\left(X(I_1,I_2)\right)$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(v(I_1,I_2)\right)} \int_0^{T(I_1,I_2)} \left(T(I_1,I_2)\right.$$
$$\left. - X(I_1,I_2)\right)^{v(I_1,I_2)-1}\left[\frac{1}{\Gamma\left(w(I_1,I_2)\right)} \int_0^{X(I_1,I_2)} \left(X(I_1,I_2)\right.\right.$$
$$\left.\left. - Y(I_1,I_2)\right)^{W(I_1,I_2)-1} f\left(Y(I_1,I_2)\right) d\left(Y(I_1,I_2)\right)\right] d\left(X(I_1,I_2)\right)$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(v(I_1,I_2)\right)\Gamma\left(w(I_1,I_2)\right)} \int_0^{T(I_1,I_2)} \left(T(I_1,I_2)\right.$$
$$\left. - X(I_1,I_2)\right)^{v(I_1,I_2)-1} d\left(X(I_1,I_2)\right) \int_0^{X(I_1,I_2)} \left(X(I_1,I_2)\right.$$
$$\left. - Y(I_1,I_2)\right)^{w(I_1,I_2)-1} f\left(Y(I_1,I_2)\right) d\left(Y(I_1,I_2)\right)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\Gamma\big(v(I_1,I_2)+w(I_1,I_2)\big)} \int_{\mathbf{0}}^{T(I_1,I_2)} \big(T(I_1,I_2)-Y(I_1,I_2)\big)^{v(I_1,I_2)+w(I_1,I_2)-1} f\big(Y(I_1,I_2)\big) d\big(Y(I_1,I_2)\big)$$

$$= B\big(v(I_1,I_2),w(I_1,I_2)\big) \int_{0}^{T(I_1,I_2)} \big(T(I_1,I_2) - Y(I_1,I_2)\big)^{v(I_1,I_2)+w(I_1,I_2)-1} f\big(Y(I_1,I_2)\big) d\big(Y(I_1,I_2)\big)$$

4. Definition of the RiemannLiouville symbolic 2-plithogenicFractional Derivative

The symbolic 2-plithogenicfractional derivative can be defined using the definition of thesymbolic 2-plithogenic fractional integral.

Definition 4.1. Suppose that $v(I_1,I_2) = n(I_1,I_2) - w(I_1,I_2) : n(I_1,I_2) = [\![w(I_1,I_2)]\!]$Then, the symbolic 2-plithogenicfractional derivative of $f\big(X(I_1,I_2)\big)$ of order $w(I_1,I_2)$ is

$$D^{u(I_1,I_2)}_{X(I_1,I_2)} f\big(X(I_1,I_2)\big) = D^{n(I_1,I_2)}_{X(I_1,I_2)} \Big[D^{-v(I_1,I_2)}_{X(I_1,I_2)} f\big(X(I_1,I_2)\big)\Big]$$

Example 4.2. suppose we wish to find the symbolic 2-plithogenicfractional derivative of$X^{m(I_1,I_2)}(I_1,I_2)$ of order $v(I_1,I_2)$ we just need to interchange $w(I_1,I_2) = n(I_1,I_2) - v(I_1,I_2)$, $n(I_1,I_2) = \mathbf{1}$ and

$w(I_1,I_2) = \mathbf{1} - v(I_1,I_2)$. so,

$$D^{v(I_1,I_2)}_{X(I_1,I_2)} f\big(X(I_1,I_2)\big) = D^{\mathbf{1}}_{X(I_1,I_2)} \Big[D^{-(1-v(I_1,I_2))}_{X(I_1,I_2)} f\big(X(I_1,I_2)\big)\Big] = D^{\mathbf{1}}_{X(I_1,I_2)} \Big[D^{-(1-v(I_1,I_2))}_{X(I_1,I_2)} X^{m(I_1,I_2)}(I_1,I_2)\Big]$$

$$= D^{\mathbf{1}}_{X(I_1,I_2)} \left[\frac{\Gamma(m(I_1,I_2)+1)}{\Gamma\big((m(I_1,I_2)-v(I_1,I_2)+1)+1\big)} X(I_1,I_2)^{m(I_1,I_2)-v(I_1,I_2)+1}\right]$$

$$= (m(I_1,I_2) - v(I_1,I_2) + 1) \frac{\Gamma(m(I_1,I_2)+1)}{(m(I_1,I_2)-v(I_1,I_2)+1)\Gamma\big((m(I_1,I_2)-v(I_1,I_2)+1)\big)} X(I_1,I_2)^{m(I_1,I_2)-v(I_1,I_2)}$$

$$= \frac{\Gamma(m(I_1,I_2)+1)}{\Gamma\big((m(I_1,I_2)-v(I_1,I_2)+1)\big)} X(I_1,I_2)^{m(I_1,I_2)-v(I_1,I_2)}$$

In particular, we will find the $\left(\frac{1}{2}+\mathbf{0}I_1+\mathbf{0}I_2\right)^{th}$ order derivative of$f\big(X(I_1,I_2)\big) = \big(X(I_1,I_2)\big)^{u(I_1,I_2)}$:

$$D^{\frac{1}{2}+0I_1+0I_2}_{X(I_1,I_2)} \big(X(I_1,I_2)\big)^{u(I_1,I_2)} = D^{1+0I_1+0I_2}_{X(I_1,I_2)} \Big[D^{-\frac{1}{2}+0I_1+0I_2}_{X(I_1,I_2)} \big(X(I_1,I_2)\big)^{u(I_1,I_2)}\Big]$$

$$= \frac{\Gamma(u(I_1,I_2)+1)}{\Gamma\left(\left(u(I_1,I_2)-\frac{1}{2}+1\right)\right)} X(I_1,I_2)^{u(I_1,I_2)-\frac{1}{2}}$$

Example 4.3.

1) $D_{X(I_1,I_2)}^{\frac{1}{2}+0I_1+0I_2}(x+xI_1+x^2I_2)^{0+0I_1+0I_2}=D_{X(I_1,I_2)}^{1+0I_1+0I_2}\left[D_{X(I_1,I_2)}^{-\frac{1}{2}+0I_1+0I_2}(x+xI_1+x^2I_2)^{0+0I_1+0I_2}\right]=$
$D_{X(I_1,I_2)}^{1+0I_1+0I_2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x+xI_1+x^2I_2}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}D_{X(I_1,I_2)}^{1+0I_1+0I_2}\left(\sqrt{x}+\left[\sqrt{x+x+x^2}-\sqrt{1+x^2}\right]I_1+\left[\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}\right]I_2\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+x+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+x^2}}\right]I_1+\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]I_2\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\left[\frac{1}{\sqrt{x+x+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\right]I_1+\left[\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]I_2\right)$

2) $D_{X(I_1,I_2)}^{\frac{1}{2}+0I_1+0I_2}(x+xI_1+x^2I_2)^{0+0I_1+0I_2}=\frac{\Gamma(0+0I_1+0I_2+1)}{\Gamma\left(\left(0+0I_1+0I_2-\frac{1}{2}+1\right)\right)}(x+xI_1+x^2I_2)^{0+0I_1+0I_2-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(x+xI_1+x^2I_2)^{0+0I_1+0I_2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+xI_1+x^2I_2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\left[\sqrt{x+x+x^2}-\sqrt{x+x^2}\right]I_1+\left[\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}\right]I_2}$

Notice that 1) and 2) is iqual.

5. Conclusion

Symbolic 2-plithogenicfractional calculus is a more generalized form of calculus. Unlike the symbolic 2-plithogenicinteger order calculus where operations are centered mainly at the symbolic 2-plithogenicintegers, fractional calculusconsiders every real symbolic 2-plithogenicnumber, $v(I_1,I_2)$. And as it has been briefly noted in this paper , the meaning and applications of this new type of calculus are quite comparable to those of the ordinary calculus, especially when gets closer and closer to a symbolic 2-plithogenicinteger.In the future, studying the symbolic 2-plithogenicfractional differential equations became possible thanks to the definitions mentioned in the paper.

References

1. Abobala, M., "AH-Subspaces in Neutrosophic Vector Spaces", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 6 , pp. 80-86. 2020.

2. Abobala, M.,. "A Study of AH-Substructures in *n*-Refined Neutrosophic Vector Spaces", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 9, pp.74-85. 2020.

3. Sankari, H., and Abobala, M., "Neutrosophic Linear Diophantine Equations With two Variables", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 38, pp. 22-30, 2020.

4. Sankari, H., and Abobala, M." *n*-Refined Neutrosophic Modules", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 36, pp. 1-11. 2020.

5. Alhamido, R., and Abobala, M., "AH-Substructures in Neutrosophic Modules", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 7, pp. 79-86 . 2020.

6. Smarandache, F., " A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic, Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability", American Research Press. Rehoboth, 2003.

7. Suresh, R., and S. Palaniammal,. "Neutrosophic Weakly Generalized open and Closed Sets", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 33, pp. 67-77,. 2020.

8. Olgun, N., and Hatip, A., "The Effect Of The Neutrosophic Logic On The Decision Making, in Quadruple Neutrosophic Theory And Applications", Belgium, EU, Pons Editions Brussels,pp. 238-253. 2020.

9. Hatip, A., Alhamido, R., and Abobala, M., "A Contribution to Neutrosophic Groups", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 0, pp. 67-76 . 2019.

10. Abobala, M., " *n*-Refined Neutrosophic Groups I", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 0, pp. 27-34. 2020.

11. Abobala, M., "Classical Homomorphisms Between n-refined Neutrosophic Rings", International Journal of Neutrosophic Science", Vol. 7, pp. 74-78. 2020.

12. Smarandache, F., " Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)", Neutrosophic Sets and Systems, vol. 53, 2023.

13. Taffach, N., and Ben Othman, K., " An Introduction to Symbolic 2-Plithogenic Modules Over Symbolic 2-Plithogenic Rings", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 54, 2023.

14. Taffach, N., " An Introduction to Symbolic 2-Plithogenic Vector Spaces Generated from The Fusion of Symbolic Plithogenic Sets and Vector Spaces", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 54, 2023.

15. Ali, R., and Hasan, Z., "An Introduction To The Symbolic 3-Plithogenic Vector Spaces", Galoitica Journal Of Mathematical Structures and Applications, vol. 6, 2023.

16. Ben Othman, K., "On Some Algorithms For Solving Symbolic 3-Plithogenic Equations", Neoma Journal Of Mathematics and Computer Science, 2023.

17. Merkepci, H., and Rawashdeh, A., " On The Symbolic 2-Plithogenic Number Theory and Integers ", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 54, 2023.

18. Rawashdeh, A., "An Introduction To The Symbolic 3-plithogenic Number Theory", Neoma Journal Of Mathematics and Computer Science, 2023.

19. Alfahal, A.; Alhasan, Y.; Abdulfatah, R.; Mehmood, A.; Kadhim, M. On Symbolic 2-Plithogenic Real Matrices and Their Algebraic Properties. Int. J. Neutrosophic Sci. 2023, 21.

20. Merkepci, H., "On Novel Results about the Algebraic Properties of Symbolic 3-Plithogenic and 4-Plithogenic Real Square Matrices", Symmetry, MDPI, 2023.

21. F. Smarandache, "Neutrosophic Set a Generalization of the Intuitionistic Fuzzy Sets," *Inter. J. Pure Appl. Math.*, pp. 287-297, 2005.

22. M. Ali, F. Smarandache, M. Shabir and L. Vladareanu, "Generalization of Neutrosophic Rings and Neutrosophic Fields," *Neutrosophic Sets and Systems,* vol. 5, pp. 9-14, 2014.

23. F. Smarandache, Introduction to Neutrosophic Statistics, USA: Sitech & Education Publishing, 2014.

24. Abobala, M., "On Some Special Substructures of Refined Neutrosophic Rings", International Journal of Neutrosophic Science, Vol. 5, pp. 59-66. 2020.

25. Sankari, H., and Abobala, M.," AH-Homomorphisms In neutrosophic Rings and Refined Neutrosophic Rings", Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 38, pp. 101-112, 2020.

26. Smarandache, F., " Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)", Neutrosophic Sets and Systems, vol. 53, 2023

27. Ahmed Hatip. (2023). Symbolic 4-Plithogenic Rings and 5-Plithogenic Rings. Symmetry. doi:DOI: 10.3390/sym15081588

28. Ahmed Hatip Mohammad AlsheikhIyadAlhamadeh. (2023). On TheOrthogonality in Real Symbolic 2-Plithogenic and 3-Plithogenic Vector Spaces. Neutrosophic Sets and Systems. doi:zenodo.10031182/10.5281

29. Nader Mahmoud Taffach, Ahmed Hatip. (2023). A Brief Review on The Symbolic 2-PlithogenicNumber Theory and Algebraic Equations. Galoitica Journal Of Mathematical Structures And Applications (GJMSA). doi:DOI: 10.54216/GJMSA.050103

30. Nader Mahmoud Taffach, Ahmed Hatip. (2023). A Review on Symbolic 2-Plithogenic Algebraic Structures. Galoitica Journal Of Mathematical Structures And Applications (GJMSA). doi:DOI: 10.54216/GJMSA.050101

31. K. Miller, B. Ross; An Introduction to the F ractional Calculus and F ractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., 1993.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 04, 2024
University of New Mexico

Article

Nötrosofik Esnek Çiftsel Açık ve Kapalı Kümeler

Hasan Dadaş *

Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Kastamonu University.

* Correspondence: hsn.dad@gmail.com ; Tel.: +905347992960

Received: 05 18, 2024; *Accepted:* 05 20, 2024.

Özet

Bu makalede, nötrosofik esnek çiftsel açık ve kapalı kümeler tanımlanmış ve bu kümelerin temel özellikleri incelenmiştir. Nötrosofik küme teorisi, belirsizlik, çelişki ve bulanıklık durumlarını aynı anda ele alabilme yeteneği sayesinde, klasik küme teorisinin ötesine geçerek daha kapsamlı bir model sunar. İlk olarak, nötrosofik kümelerin ve esnek çiftsel topolojik uzayların temel kavramları ele alınmıştır. Ardından, nötrosofik esnek çiftsel açık ve kapalı kümeler tanımlanmış ve bu kümelerin çeşitli matematiksel özellikleri detaylandırılmıştır. Bu çalışma, belirsiz ve bulanık verilerin analiz edilmesinde önemli bir araç olan nötrosofik küme teorisinin uygulama alanlarını genişletmeyi amaçlamaktadır.

Anahtar Kelimeler
Nötrosofik Küme Teorisi;Esnek Çiftsel Topolojik Uzaylar;Açık Kümeler;Kapalı Kümeler;Topolojik Özellikler

1. GİRİŞ

Matematik ve mantık bilimlerinde, belirsizlik ve esnekliğin incelenmesi, karar verme süreçlerinin ve modelleme yaklaşımlarının geliştirilmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu bağlamda, nötrosofik küme teorisi, klasik küme teorisindeki kesinlik ve kesin olmayan durumlar arasındaki boşluğu doldurmak için ortaya çıkmıştır. Nötrosofik küme teorisi, gerçek dünya problemlerindeki belirsizlikleri daha iyi temsil etmek için kullanılan esnek ve kapsamlı bir yöntem sunar.

"Nötrosofik Esnek Çiftsel Açık ve Kapalı Kümeler" başlıklı bu makalede, nötrosofik küme teorisinin esnek çiftsel açık ve kapalı kümeler üzerindeki uygulamaları incelenecektir. İlk olarak, nötrosofik küme teorisinin temel kavramları ve tanımları gözden geçirilecektir. Ardından, esnek çiftsel açık ve kapalı kümelerin tanımları ve özellikleri detaylandırılacak ve bu kavramların matematiksel temelleri üzerinde durulacaktır. Son olarak, bu kümelerin çeşitli alanlardaki uygulama potansiyelleri tartışılacaktır.

Bu makale, belirsizlik ve esnekliği içeren karmaşık problemlerin çözümünde önemli bir araç olan nötrosofik küme teorisinin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmayı amaçlamaktadır.

2. Tanımlar

Bu bölümde nötrosofik esnek ikili topolojik uzaylarda Çiftsel Açık ve Kapalı Kümeler ++++ tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir

Tanım 2.1

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Eğer

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = (\mathbf{D_1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{D_2}, \mathbf{E}) = \left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{e}, \{< \omega, \mathbf{maks}\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D_1(e)}}(\omega), \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D_2(e)}}(\omega)\}, \\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{D_1(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{D_2(e)}}(\omega)\}, \\ \mathbf{min}\{\mathbf{v}_{\mathbf{D_1(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{D_2(e)}}(\omega)\} >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E} \end{array} \right\}$$

olacak biçimde

$$(\mathbf{D_1}, \mathbf{E}) = \{(\mathbf{e}, \{< \omega, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D_1(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{D_1(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{D_1(e)}}(\omega) >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E}\} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}$$

$$(\mathbf{D_2}, \mathbf{E}) = \{(\mathbf{e}, \{< \omega, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D_2(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{D_2(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{D_2(e)}}(\omega) >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E}\} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$$

nötrosofik esnek açık kümeleri varsa,

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = \{(\mathbf{e}, \{< \omega, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{D(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{D(e)}}(\omega) >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E}\}$$

kümesine nötrosofik esnek çiftsel açık küme denir.

Tüm nötrosofik esnek çiftsel açık kümelerin ailesi $\mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ ile gösterilir.

Tanım 2.2

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Eğer

$$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) = (\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{M_2}, \mathbf{E}) = \left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{e}, \{< \omega, \mathbf{min}\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{M_1(e)}}(\omega), \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{M_2(e)}}(\omega)\}, \\ \mathbf{maks}\{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M_1(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M_2(e)}}(\omega)\}, \\ \mathbf{maks}\{\mathbf{v}_{\mathbf{M_1(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{M_2(e)}}(\omega)\} >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E} \end{array} \right\}$$

olacak biçimde

$$(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) = \{(\mathbf{e}, \{< \omega, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{M_1(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M_1(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{M_1(e)}}(\omega) >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E}\} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}$$

$$(\mathbf{M_2}, \mathbf{E}) = \{(\mathbf{e}, \{< \omega, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{M_2(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M_2(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{M_2(e)}}(\omega) >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E}\} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$$

nötrosofik esnek kapalı kümeleri varsa,

$$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) = \{(\mathbf{e}, \{< \omega, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{M(e)}}(\omega), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{M(e)}}(\omega), \mathbf{v}_{\mathbf{M(e)}}(\omega) >: \omega \in \mathbf{W}\}) : \mathbf{e} \in \mathbf{E}\}$$

kümesine nötrosofik esnek çiftsel kapalı küme denir. Açıktır ki tümleyeni nötrosofik esnek çiftsel açık küme olan küme, nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümedir.

Tüm nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümelerin ailesi $\mathbf{NSPC}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ ile gösterilir**.**

Örnek 2.3

$\mathbf{W} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ evrensel küme, $\mathbf{E} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ parametrelerin kümesi ve

$$\mathbf{M_1}(\mathbf{e_1}) = \left\{< \omega_1, \frac{8}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10} >, < \omega_2, \frac{4}{10}, \frac{4}{10}, \frac{4}{10} >, < \omega_3, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10} >\right\}$$

$$\mathbf{M_1}(\mathbf{e_2}) = \left\{< \omega_1, \frac{6}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} >, < \omega_2, \frac{5}{10}, \frac{5}{10}, \frac{1}{10} >, < \omega_3, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10} >\right\}$$

$$\mathbf{M_2}(\mathbf{e_1}) = \left\{< \omega_1, \frac{6}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} >, < \omega_2, \frac{5}{10}, \frac{5}{10}, \frac{1}{10} >, < \omega_3, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} >\right\}$$

$$\mathbf{M_2}(\mathbf{e_2}) = \left\{< \omega_1, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} >, < \omega_2, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10} >, < \omega_3, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10} >\right\}$$

olmak üzere $\boldsymbol{\tau_1^{NSS}} = \{\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, (\mathbf{M_1}, \mathbf{E})\}$ ve $\boldsymbol{\tau_2^{NSS}} = \{\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})\}$ nötrosofik esnek topolojileri verilsin. Bu durumda

$$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) = \left\{\begin{array}{l}\left(\mathbf{e_1}, \left\{< \omega_1, \frac{8}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10} >, < \omega_2, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10} >, < \omega_3, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10} >\right\}\right), \\ \left(\mathbf{e_2}, \left\{< \omega_1, \frac{6}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} >, < \omega_1, \frac{5}{10}, \frac{5}{10}, \frac{1}{10} >, < \omega_3, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10} >\right\}\right)\end{array}\right\}$$

nötrosofik esnek kümesi $(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})$ ye eşit olup bir nötrosofik esnek çiftsel açık kümedir. Ayrıca

$$\mathbf{M_1}^{\mathbf{c}}(\mathbf{e_1}) = \left\{\langle \omega_1, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\rangle, \langle \omega_2, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{4}{10}\rangle, \langle \omega_3, \frac{2}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\rangle\right\}$$

$$\mathbf{M_1}^{\mathbf{c}}(\mathbf{e_2}) = \left\{\langle \omega_1, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}, \frac{6}{10}\rangle, \langle \omega_2, \frac{1}{10}, \frac{5}{10}, \frac{5}{10}\rangle, \langle \omega_3, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}\rangle\right\}$$

$$\mathbf{M_2}^{\mathbf{c}}(\mathbf{e_1}) = \left\{\langle \omega_1, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}, \frac{6}{10}\rangle, \langle \omega_2, \frac{1}{10}, \frac{5}{10}, \frac{5}{10}\rangle, \langle \omega_3, \frac{4}{10}, \frac{7}{10}, \frac{5}{10}\rangle\right\}$$

$$\mathbf{M_2}^{\mathbf{c}}(\mathbf{e_2}) = \left\{\langle \omega_1, \frac{4}{10}, \frac{7}{10}, \frac{6}{10}\rangle, \langle \omega_2, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}\rangle, \langle \omega_3, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}\rangle\right\}$$

olup

$$(\mathbf{M_1^c}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{M_2^c}, \mathbf{E}) = \left\{\begin{array}{l}\left(\mathbf{e_1}, \left\{\left\langle \omega_1, \frac{2}{10}, \frac{8}{10}, \frac{8}{10}\right\rangle, \left\langle \omega_2, \frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}\right\rangle, \left\langle \omega_3, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}, \frac{5}{10}\right\rangle\right\}\right), \\ \\ \left(\mathbf{e_2}, \left\{\langle \omega_1, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}, \frac{6}{10}\rangle, \langle \omega_2, \frac{1}{10}, \frac{5}{10}, \frac{5}{10}\rangle, \langle \omega_3, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}\rangle\right\}\right)\end{array}\right\}$$

kümesi nötrosofik esnek ikili kapalı kümedir.

Teorem 2.4

$(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau_1^{NSS}}, \boldsymbol{\tau_2^{NSS}}, \mathbf{E})$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda

1) $\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ nötrosofik esnek çiftsel açık kümelerdir.

2) Nötrosofik esnek çiftsel açık kümelerin keyfi birleşimleri de nötrosofik esnek çiftsel açık kümelerdir.

3) Nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümelerin keyfi kesişimleri de nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümelerdir.

İspat:

1) $\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ ve $\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})} = \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})} \cup \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ olduğundan $\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ bir nötrosofik esnek çiftsel açık kümedir. $\mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ olduğundan $\mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ bir nötrosofik esnek çiftsel açık kümedir.

2) $\{(\mathbf{U_i}, \mathbf{E}) | \mathbf{i} \in \mathbf{I}\} \subseteq \mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ olsun. Bu durumda $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}$ için

$$(\mathbf{U_i}, \mathbf{E}) = \left(\mathbf{M_i^1}, \mathbf{E}\right) \cup (\mathbf{M_i^2}, \mathbf{E})$$

olacak biçimde $(\mathbf{M_i^1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}$ **ve** $(\mathbf{M_i^2}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ vardır. Böylece

$$\cup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{U_i}, \mathbf{E}) = \cup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} ((\mathbf{M_i^1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M_i^2}, \mathbf{E}))$$

$$= (\cup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{M_i^1}, \mathbf{E})) \cup (\cup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{M_i^2}, \mathbf{E}))$$

olur. $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}$ ve $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olduğundan

$$(\cup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{M_i^1}, \mathbf{E})) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}, \qquad (\cup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{M_i^2}, \mathbf{E})) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$$

dir. Dolayısıyla $\cup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{U_i}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ olur.

3) $\{(\mathbf{F_i}, \mathbf{E}) | \mathbf{i} \in \mathbf{I}\} \subseteq \mathbf{NSPC}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ olsun. Bu durumda $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}$ için

$$(\mathbf{F_i}, \mathbf{E}) = (\mathbf{N_i^1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N_i^2}, \mathbf{E})$$

olacak biçimde $(\mathbf{N_i^1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}, (\mathbf{N_i^2}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ vardır. Böylece

$\cap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}(\mathbf{F_i}, \mathbf{E}) = \cap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} ((\mathbf{N_i^1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N_i^2}, \mathbf{E})) = (\cap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{N_i^1}, \mathbf{E})) \cap (\cap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{N_i^2}, \mathbf{E}))$

olur. Ayrıca $\cap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{N_i^1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}$ ve $\cap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} (\mathbf{N_i^2}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ olduğundan $\cap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}(\mathbf{F_i}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSPC}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ dir.

Teorem 2.5

Nötrosofik esnek çiftsel açık kümenin tümleyeni, nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümedir.

İspat:

$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ olsun. Bu durumda $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) = (\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})$ olacak biçimde $(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}$ ve $(\mathbf{M_2}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ vardır.

$$(\mathbf{M}, \mathbf{E})^{\mathbf{c}} = [(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})]^{\mathbf{c}} = (\mathbf{M_1}, \mathbf{E})^{\mathbf{c}} \cap (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})^{\mathbf{c}}$$

olur. $(\mathbf{M_1}, \mathbf{E})^{\mathbf{c}} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{NSS}}$ ve $(\mathbf{M_2}, \mathbf{E})^{\mathbf{c}} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{NSS}}$ olduğundan $(\mathbf{M}, \mathbf{E})^{\mathbf{c}}$ bir nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümedir.

Sonuç 2.6

Nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümenin tümleyeni nötrosofik esnek çiftsel açık kümedir.

Teorem 2.7

$(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E})$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda

$(\mathbf{M}, \mathbf{E}), (\mathbf{N}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ ise $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ olur.

İspat:

$(\mathbf{M}, \mathbf{E}), (\mathbf{N}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ olsun. Bu durumda

$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) = (\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})$ ve $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) = (\mathbf{N_1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N_2}, \mathbf{E})$

olacak biçimde $(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}), (\mathbf{N_1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}$ ve $(\mathbf{M_2}, \mathbf{E}), (\mathbf{N_2}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ nötrosofik esnek açık kümeleri vardır. Buradan

$$(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N}, \mathbf{E}) = (\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{M_2}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N_1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N_2}, \mathbf{E})$$

olur. Ayrıca $(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N_1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}$ ve $(\mathbf{M_2}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N_2}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ olduğundan $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \cap (\mathbf{N}, \mathbf{E})$ bir nötrosofik esnek çiftsel açık kümedir.

Teorem 2.8

$(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E})$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ ailesi $\mathbf{W}$ üzerinde bir supra nötrosofik esnek topolojidir ve $\boldsymbol{\tau}_{12}$ ile gösterilir.

İspat:

Teorem 2.4 ten açıktır.

Teorem 2.9

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda her nötrosofik esnek $\mathbf{i}-$ açık kümesi, bir nötrosofik esnek çiftsel açık kümedir.

İspat:

$(\mathbf{H}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}$ veya $(\mathbf{H}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ olsun. Bu durumda $(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = (\mathbf{H}, \mathbf{E}) \cup \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ olduğundan $(\mathbf{H}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSPO}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ dir.

Sonuç 2.10

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}} \cup \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}} \subset \boldsymbol{\tau}_{12}$$

sağlanır.

Aşağıdaki örnek, Sonuç 2.10 nun tersinin geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 2.11

$\mathbf{W} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathbf{E} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ olmak üzere $\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ nötrosofik esnek ikili topolojik uzayında

$$\boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}} = \left\{\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, (\mathbf{M_1}, \mathbf{E})\right\}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}} = \left\{\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}, (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})\right\}$$

olsun. $(\mathbf{M_1}, \mathbf{E})$ **ve** $(\mathbf{M_2}, \mathbf{E})$ nötrosofik esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\mathbf{M_1}(\mathbf{e_1}) = \left\{< \omega_1, \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}} >\right\}$$

$$\mathbf{M_1}(\mathbf{e_2}) = \left\{< \omega_1, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} >\right\}$$

$$\mathbf{M_2}(\mathbf{e_1}) = \left\{< \omega_1, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} >\right\}$$

$$\mathbf{M_2}(\mathbf{e_2}) = \left\{< \omega_1, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} >\right\}$$

Bu durumda $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}} = \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}} \cup \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}} \cup \{(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})\}$ olur. Ancak $(\mathbf{M_1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M_2}, \mathbf{E})$ birleşimi $\boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}} \cup \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ ye ait değildir.

Teorem 2.12

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda her nötrosofik esnek $\mathbf{i}-$ kapalı küme, bir nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümedir.

İspat:

Teorem 2.5 nin ispatına benzer.

Teorem 2.13

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Eğer $\boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}} \subset \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ ise $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}} = \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ dir.

İspat:

$\boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}} \subset \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ ve $(\mathbf{H}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}}$ olsun. Bu durumda $(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = (\mathbf{H_1}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{H_2}, \mathbf{E})$ **o**lacak biçimde $(\mathbf{H_1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}$ ve $(\mathbf{H_2}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ nötrosofik esnek açık kümeleri vardır.
$\boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}} \subset \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ olduğundan $(\mathbf{H_1}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ olup $(\mathbf{H}, \mathbf{E}) \in \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ elde edilir. Sonuç olarak $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}} \subset \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}$ dir.

3. Sonuç

Sonuç olarak, nötrosofik küme teorisi, belirsizlik ve esnekliği dikkate alan karmaşık problemlerin çözümünde güçlü bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu makalede incelenen nötrosofik esnek çiftsel açık ve kapalı kümeler, klasik küme teorisinin sınırlarını aşarak daha geniş bir uygulama yelpazesi sunmaktadır. Nötrosofik kümelerin esnekliği, belirsiz ve bulanık verilerin işlenmesinde önemli avantajlar sağlamaktadır.

Bu çalışma, nötrosofik küme teorisinin temel kavramlarını ve esnek çiftsel açık ve kapalı kümelerin özelliklerini detaylandırarak, bu teorinin pratik uygulamalardaki potansiyelini ortaya koymuştur. Özellikle, mühendislik, yapay zeka, veri madenciliği ve karar destek sistemleri gibi alanlarda, bu kümelerin kullanımı, belirsizlikle başa çıkmada yeni ufuklar açabilir.

Gelecekte, nötrosofik küme teorisinin daha da geliştirilmesi ve farklı disiplinlerdeki uygulamalarının genişletilmesi, bilim ve teknolojinin ilerlemesine önemli katkılar sağlayacaktır. Bu bağlamda, yapılan bu çalışma, nötrosofik esnek çiftsel açık ve kapalı kümelerin anlaşılmasına ve kullanılmasına yönelik önemli bir adım olarak değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Smarandache, F. Neutrosophic set, a generalisation of the intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **2005**, 24, 287-297.

2. Salma, A. A.; Alblowi, S. A. Neutrosophic set and neutrosophic topological spaces. *IOSR Journal of Mathematics* **2012**, 3(4), 31-35.

3. Maji, P. Neutrosophic soft set. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* **2013**, 5(1), 157-168.

4. Taha, Y.; Cigdem, G. A.; Sadi, B. A New Approach to Operations on Neutrosophic Soft Sets and to Neutrosophic Soft Topological Spaces. *Communications in Mathematics and Applications* **2019**, 10(3), 481-493.

5. Taha, Y. O.; Cigdem, G. A.; Sadi, B. Separation axioms on neutrosophic soft topological spaces. *Turkish Journal of Mathematics* **2019**, 43, 498-510.

6. Dadas, H.; Demiralp, S. Introduction to neutrosophic soft bitopological spaces. *International Journal of Neutrosophic Science* **2021**, 14(2), 72-81.

7. Dadas, H.; Demiralp, S. Neutrosophic Soft Tri-Topological Spaces. *International Journal of Neutrosophic Science* **2021**, 15(2), 77-88.

8. Demiralp, S.; Dadas, H. Generalized Open Sets in Neutrosophic Soft Bitopological Spaces. *Neutrosophic Sets and Systems* **2022**, 48, 339-355.

9. Dadas, H. Advanced Decision-Making Techniques with Generalized Close Sets in Neutrosophic Soft Bitopological Spaces. *Galoitica: Journal of Mathematical Structures and Applications* **2023**, 10(1), 8-16.

10. Dadas, H. Neutrosophic Soft n-Topological Spaces: A Framework for Decision-Making Problems. Galoitica: *Journal of Mathematical Structures and Applications* **2023**, 9(2), 15-21.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 04, 2024
University of New Mexico

Article

Nötrosofik Esnek Çiftsel Kapanış Operatörü

Hasan Dadaş *

Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Kastamonu University.

***** Correspondence: hsn.dad@gmail.com ; Tel.: +905347992960

Received: 05 18, 2024; *Accepted:* 05 20, 2024.

Özet

Bu çalışmada, nötrosofik esnek ikili topolojik uzaylarda kapanış operatörü tanımlanmış ve incelenmiştir. Temel amaç, belirsizlik ve bulanıklığı etkin bir şekilde ele alan nötrosofik küme teorisinin ilkelerini içeren klasik topolojik kavramları genişletmektir. İlk olarak, nötrosofik kümeler ve esnek ikili topolojik uzayların temel kavramları gözden geçirilmiştir. Daha sonra, nötrosofik esnek çiftsel kapanış operatörünün tanımı ve temel özellikleri sunulmuştur. Bu operatörün, özellikle belirsiz ve bulanık verilerle başa çıkmadaki avantajları ve potansiyel uygulamaları tartışılmıştır. Bu araştırma, nötrosofik küme teorisinin teorik gelişimine ve karmaşık problem çözme senaryolarındaki pratik uygulamalarına katkıda bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler
Nötrosofik Küme Teorisi;Esnek İkili Topolojik Uzaylar;Kapanış Operatörü.

1. GİRİŞ

Nötrosofik küme teorisi, belirsizlik ve bulanıklığın matematiksel modellemelerde etkin bir şekilde temsil edilmesini sağlayan yenilikçi bir yaklaşımdır. Bu teori, klasik küme teorisinin ötesine geçerek, belirsizlik, çelişki ve bulanıklığı aynı anda ele alabilme kapasitesine sahiptir. Bu bağlamda, nötrosofik esnek ikili topolojik uzaylar, belirsizliklerin ve bulanıklıkların daha karmaşık yapılar içerisinde analiz edilmesine olanak tanımaktadır.

"Nötrosofik Esnek Çiftsel Kapanış Operatörü" başlıklı bu makalede, nötrosofik esnek ikili topolojik uzaylarda kapanış operatörü tanımlanmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. İlk olarak, nötrosofik küme teorisinin ve esnek ikili topolojik uzayların temel kavramları gözden geçirilecektir. Ardından, kapanış operatörünün tanımı yapılarak, bu operatörün çeşitli matematiksel özellikleri detaylandırılacaktır. Ayrıca, nötrosofik esnek çiftsel kapanış operatörünün, geleneksel kapanış operatörlerine kıyasla sağladığı avantajlar ve uygulama alanları tartışılacaktır.

Bu çalışma, nötrosofik küme teorisinin ileri düzeydeki uygulamaları ve teorik temelleri hakkında kapsamlı bir bakış açısı sunmayı amaçlamaktadır. Nötrosofik esnek çiftsel kapanış operatörünün incelenmesi, belirsiz ve bulanık verilerin işlenmesinde daha sofistike yöntemlerin geliştirilmesine katkıda bulunacaktır.

Tanımlar

Bu bölümde nötrosofik esnek ikili topolojik uzaylarda kapanış operatörü tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.1

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay ve $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSS}(\mathbf{W})$ olsun.

$(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ kümesinin nötrosofik esnek çiftsel kapanışı $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ kümesini içeren tüm nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümelerin kesişimidir ve $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ ile gösterilir. Yani

$$\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) = \cap \{(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \in \mathbf{PNSC}(\mathbf{W}, \mathbf{E}) | (\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subset (\mathbf{M}, \mathbf{E})\}$$

dir. $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ nin $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ yi içeren en küçük nötrosofik esnek çiftsel kapalı küme olduğu açıktır.

Örnek. 2.2

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ nötrosofik esnek ikili topolojik uzayı Örnek 4.2.1'deki gibi tanımlansın.

$$(\mathbf{G}, \mathbf{E}) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\mathbf{e}_1, \left\{ < \omega_1, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} > \right\}\right), \\ \left(\mathbf{e}_2, \left\{ < \omega_1, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} > \right\}\right) \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlı nötrosofik esnek kümesi verilsin. $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{G}, \mathbf{E})$ kapanışını bulmak için $(\mathbf{G}, \mathbf{E})$ yi kapsayan tüm nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümeleri belirlememiz gerekiyor.

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{e}_1) = \left\{ < \omega_1, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} > \right\}$$

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{e}_2) = \left\{ < \omega_1, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} > \right\}$$

ve

$$\mathbf{M}_2{}^{\mathbf{c}}(\mathbf{e}_1) = \left\{ < \omega_1, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}} > \right\},$$

$$\mathbf{M}_2{}^{\mathbf{c}}(\mathbf{e}_2) = \left\{ < \omega_1, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} >, < \omega_2, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}} >, < \omega_3, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} > \right\}$$

olduğundan $(\mathbf{G}, \mathbf{E})$ yi kapsayan nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümeler $(\mathbf{M}_2, \mathbf{E})^{\mathbf{c}}$ ve $\mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ dir. Böylece $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{G}, \mathbf{E}) = (\mathbf{M}_2, \mathbf{E})^{\mathbf{c}} \cap \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})} = (\mathbf{M}_2, \mathbf{E})^{\mathbf{c}}$ olur.

Teorem 2.3

$(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E})$ bir nötrosofik esnek ikili topolojik uzay olsun. Bu durumda $(\mathbf{N}, \mathbf{E}), (\mathbf{M}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSS}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$ için aşağıdakiler sağlanır:

1. $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}) = \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ ve $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}) = \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$
2. $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$
3. $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ bir nötrosofik esnek çiftsel kapalı küme ise $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) = (\mathbf{N}, \mathbf{E})$
4. Eğer $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq (\mathbf{M}, \mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E})$
5. $\left(\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E})\right) \subset \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}\left((\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M}, \mathbf{E})\right)$
6. $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}\left(\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})\right) = \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$

İspat:

1. $\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ ve $\mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ kümeleri nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümelerdir. Ayrıca $\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$yi kapsayan en küçük nötrosofik esnek çiftsel kapalı küme kendisi olduğundan $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}) = \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ olur. $\mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ yi kapsayan tek nötrosofik esnek çiftsel kapalı küme kendisi olduğundan $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}) = \mathbf{1}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ olur.
2. Tanım.1 ile $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ olduğu açıktır.
3. $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ kümesi nötrosofik esnek çiftsel kapalı bir küme olsun. Bu durumda $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ nötrosofik esnek kümesi $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ yi kapsayan en küçük nötrosofik esnek çiftsel kapalı küme olduğundan $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) = (\mathbf{N}, \mathbf{E})$ elde edilir.
4. $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq (\mathbf{M}, \mathbf{E})$ olsun. $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E})$ olduğundan

$$(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E})$$

elde edilir. Ancak $(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ yi kapsayan en küçük nötrosofik esnek çiftsel kapalı küme $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ olduğundan $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E})$ olur.

5. $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq ((\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M}, \mathbf{E}))$ ve $(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \subseteq ((\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M}, \mathbf{E}))$ olduğundan $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}\left((\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M}, \mathbf{E})\right)$ ve $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}\left((\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M}, \mathbf{E})\right)$ bulunur. Böylece

$$\left(\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E})\right) \subset \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}\left((\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cup (\mathbf{M}, \mathbf{E})\right)$$

elde edilir.

6. $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) = (\mathbf{M}, \mathbf{E})$ olsun. Bu durumda $(\mathbf{M}, \mathbf{E})$ bir nötrosofik esnek çiftsel kapalı kümedir. Dolayısıyla $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{M}, \mathbf{E}) = (\mathbf{M}, \mathbf{E})$ bulunur. **Böylece**

$\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}\ (\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})) = \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$

olur.

Teorem.2.4

$\left(\mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}_1^{\mathbf{NSS}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathbf{NSS}}, \mathbf{E}\right)$ **bir** nötrosofik esnek ikili topolojik uzay, $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \in \mathbf{NSS}(\mathbf{W}, \mathbf{E})$, $\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}$ bir nötrosofik esnek nokta ve, $\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}$ yi içeren tüm nötrosofik esnek çiftsel açık kümelerin ailesi $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}}\left(\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}\right)$ olsun. Bu durumda her $\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}}\left(\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}\right)$ için

$$\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})} \in \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \Leftrightarrow \mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}} \cap (\mathbf{N}, \mathbf{E}) \neq \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$$

dir.

İspat:

$\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})} \in \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ olsun. $\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}} \cap (\mathbf{N}, \mathbf{E}) = \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ olacak biçimde en az bir $\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}}\left(\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}\right)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subset (\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}})^{\mathbf{c}}$ dir. Böylece

$$\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subset \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}})^{\mathbf{c}} = (\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}})^{\mathbf{c}}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cap \mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}} = \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ olur. Bı ise

$$\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})} \in \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \cap \mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}}$$

olması ile çelişir.

Tersine her $\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}}\left(\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}\right)$ için $\mathbf{U}_{\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}} \cap (\mathbf{N}, \mathbf{E}) \neq \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ olsun Şimdi $\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})} \notin \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})} \in \left(\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})\right)^{\mathbf{c}} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{12}}\left(\omega^{\mathbf{e}}{}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}\right)$$

olur. Böylece, hipotezden $\left(\mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})\right)^{\mathbf{c}} \cap (\mathbf{N}, \mathbf{E}) \neq \mathbf{0}_{(\mathbf{W},\mathbf{E})}$ elde edilir. Bu ise $(\mathbf{N}, \mathbf{E}) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{NSS}}(\mathbf{N}, \mathbf{E})$ olması ile çelişir.

3. Sonuç

Sonuç olarak, nötrosofik esnek ikili topolojik uzaylarda tanımlanan kapanış operatörü, belirsizlik ve bulanıklığı ele alan matematiksel modellerin geliştirilmesine önemli katkılar sağlamaktadır. Bu çalışma, nötrosofik küme teorisinin esnek yapısını kullanarak, klasik topolojik kavramları genişletmiş ve bu kavramların belirsiz veriler üzerindeki uygulanabilirliğini göstermiştir.

Nötrosofik esnek çiftsel kapanış operatörünün tanımı ve incelenen özellikleri, bu operatörün matematiksel yapısını ve potansiyel kullanım alanlarını ortaya koymuştur. Bu operatörün, mühendislikten yapay zekaya, veri madenciliğinden karar destek sistemlerine kadar geniş bir yelpazede uygulama potansiyeli bulunmaktadır. Özellikle belirsiz ve bulanık verilerin yoğun olduğu alanlarda, bu tür operatörlerin kullanımı, daha hassas ve güvenilir sonuçlar elde edilmesine olanak tanımaktadır.

Gelecekte, nötrosofik esnek çiftsel kapanış operatörünün daha da geliştirilmesi ve farklı disiplinlerdeki uygulamalarının genişletilmesi, bilimsel ve teknolojik ilerlemeye önemli katkılar

sağlayacaktır. Bu bağlamda, bu çalışma, nötrosofik küme teorisinin ileri düzeyde anlaşılmasına ve uygulanmasına yönelik önemli bir adım olarak değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Smarandache, F. Neutrosophic set, a generalisation of the intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **2005**, 24, 287-297.

2. Salma, A. A.; Alblowi, S. A. Neutrosophic set and neutrosophic topological spaces. *IOSR Journal of Mathematics* **2012**, 3(4), 31-35.

3. Maji, P. Neutrosophic soft set. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* **2013**, 5(1), 157-168.

4. Taha, Y.; Cigdem, G. A.; Sadi, B. A New Approach to Operations on Neutrosophic Soft Sets and to Neutrosophic Soft Topological Spaces. *Communications in Mathematics and Applications* **2019**, 10(3), 481-493.

5. Taha, Y. O.; Cigdem, G. A.; Sadi, B. Separation axioms on neutrosophic soft topological spaces. *Turkish Journal of Mathematics* **2019**, 43, 498-510.

6. Dadas, H.; Demiralp, S. Introduction to neutrosophic soft bitopological spaces. *International Journal of Neutrosophic Science* **2021**, 14(2), 72-81.

7. Dadas, H.; Demiralp, S. Neutrosophic Soft Tri-Topological Spaces. *International Journal of Neutrosophic Science* **2021**, 15(2), 77-88.

8. Demiralp, S.; Dadas, H. Generalized Open Sets in Neutrosophic Soft Bitopological Spaces. *Neutrosophic Sets and Systems* **2022**, 48, 339-355.

9. Dadas, H. Advanced Decision-Making Techniques with Generalized Close Sets in Neutrosophic Soft Bitopological Spaces. *Galoitica: Journal of Mathematical Structures and Applications* **2023**, 10(1), 8-16.

10. Dadas, H. Neutrosophic Soft n-Topological Spaces: A Framework for Decision-Making Problems. Galoitica: *Journal of Mathematical Structures and Applications* **2023**, 9(2), 15-21.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 04, 2024

University of New Mexico

Multi-Attribute Decision Making for Smog Control Using Extended Vector Similarity Measure Based on Interval Type-2 Intuitionistic Fuzzy Sets

M. Touqeer [1,*], Sajeela Fatima[2]

[1]Department of Mathematical Sciences, University of Engineering and Technology, Taxila; touqeer.fareed@uettaxila.edu.pk

[2]Department of Mathematical Sciences, University of Engineering and Techonology, Taxila; sajeelafatima13@gmail.com

*Correspondence: touqeer.fareed@uettaxila.edu.pk

Received: 5 18, 2024; *Accepted*: 5 20, 2024.

Abstract. Interval Type-2 Intuitionistic Fuzzy Sets (IT2IFS) serve an essential part in the theory of fuzzy sets, serving to be models for linguistic phrases and finding applications in engineering. These sets are described through their Footprints of Uncertainty (FOU), that are further characterized through functions of membership (MF) and non-membership functions (NMF). Uncertainty within the set is quantified by the IT2IFS centroid. When employing IT2IFS to model input words in a CWW engine (Zadeh 1996, 1999; Mendel 2002; Liu and Mendel 2009), the engine's output is also an IT2IFS, requiring mapping to a linguistic label for comprehension. Since each linguistic label is represented by an IT2FS, it becomes essential to assess the similarity between the CWW engine's output and linguistic labels to identify the most analogous linguistic label. This paper aims to introduce the concept of the IT2IFS centroid and utilize it for comparing two IT2IFS using vector similarity measure (VSM).

Keywords: Interval Type-2 Intuitionistic Fuzzy Sets (IT2IFS); Centroid; Extended vector similarity measure (EVSM); Multi-attribute decision making (MADM).)

1. Introduction

One of the most popular and useful techniques for managing non-probabilistic uncertainty is fuzzy set theory. L.A. Zadeh introduced fuzzy sets (Zadeh 1965), which have several practical

applications and allow for easier modeling of complicated systems. The modeling of T1FS gets increasingly complicated when more uncertainties are introduced. In order to capture the fuzziness and uncertainty of real-world problems, Mendel and John (Mendel and John 2002; Mendel et al. 2006; Mendel 2007) presented T2FS, these incorporate a footprint of uncertainty that adds more degrees of freedom and allow one to characterize the uncertain data in a three-dimensional (3D) representation. The most often used T2FS, IT2FS (Mendel and John 2002; Mendel et al. 2006; Mendel 2007), is an a typical example of general T2FS and is less complex due to the large figures of complexity involved. Touqeer et al. (2020, 2021) have worked significantly with IT2FS.

IFS (Atanassov 1986, 1989), an extension of fuzzy sets, are introduced by K. T. Atanassov. In an IFS, an element's membership degree represents the level of membership, as in fuzzy sets. However, there is an additional degree called non-membership degree, which quantifies the level of an element's non-membership in the set. In order to address the vagueness of incomplete and unclear knowledge or information, IFS are beneficial and helpful in decision-making difficulties by numerous researchers.

IT2IFS have emerged as fundamental constructs in the realm of fuzzy set theory, playing a pivotal role in modeling linguistic expressions and finding diverse applications in engineering domains.The distinctive features of these sets are their FOU, which are defined by UMF, LMF, UNMF and LMF. Quantification of ambiguity within an IT2IFS is encapsulated by its centroid, contributing to a nuanced understanding of the inherent imprecision in linguistic modeling. Particularly, when applied to model input words within a Computing with Words (CWW) engine, the engine's output manifests as an IT2IFS. This necessitates the mapping of the engine's output to a linguistic label for comprehensibility. Given that each linguistic label is represented by an IT2FS, evaluating the similarity between the CWW engine's output and linguistic labels becomes imperative for identifying the most analogous linguistic label.

MADM (Touqeer et al. 2021,2023) is a crucial procedure in various fields, ranging from business and engineering to healthcare and environmental management. It entails assessing and choosing the best option from a range of options according to a number of factors or attributes. One approach to enhance the MADM process is the utilization of similarity measures, which assess the resemblance between alternatives in a multidimensional space. These measures play a pivotal role in quantifying the degree of similarity between alternatives, providing a foundation for decision-makers to make informed and effective choices.

The idea of the IT2IFS centroid in this specific circumstance is provided and elaborated upon in this research paper. Furthermore, the paper aims to demonstrate the utility of the centroid in the comparison of two IT2IFSs using a EVSM. This comparative analysis is crucial for refining the mapping process between the CWW engine's output and linguistic labels, enhancing the accuracy and effectiveness of linguistic comprehension in the concept of fuzzy set theory.

The arrangement of the article is as follows: A few basic descriptions are provided within Section 2. In Section 3 Centroid of IT2IFS is presented. Section 4 demonstrates the Extended Vector similarity measure. In Section 5 an application is demonstrated to represent the proposed approach.

2. **Preliminaries**

A few definitions are briefly reviewed in this section.

Definition 2.1. In (Mendel et al. 2002, 2006), IT2FS $\tilde{\mathfrak{J}}$ is described as

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \int_{\mathfrak{x}\epsilon\mathfrak{J}} \int_{\mathfrak{u}\epsilon J_{\mathfrak{x}}} \frac{1}{(\mathfrak{x},\mathfrak{u})} = [(\mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{r},\mathfrak{r};\overline{\lambda}(x)),(\acute{\mathfrak{p}},\acute{\mathfrak{q}},\acute{\mathfrak{r}},\acute{\mathfrak{r}};\underline{\lambda}(x))] \tag{1}$$

The FOU of $\tilde{\mathfrak{J}}$ [FOU($\tilde{\mathfrak{J}}$)], that is, the union of all the primary memberships, represents uncertainty about $\tilde{\mathfrak{J}}$.

$$FOU(\tilde{\mathfrak{J}}) = \bigcup_{\mathfrak{x}\epsilon\mathfrak{J}} J_{\mathfrak{x}} = \{(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) : \mathfrak{y}\epsilon J_{\mathfrak{x}} = [\underline{\mathfrak{J}(\mathfrak{x})},\overline{\mathfrak{J}(\mathfrak{x})}] \subseteq [0,1]\}. \tag{2}$$

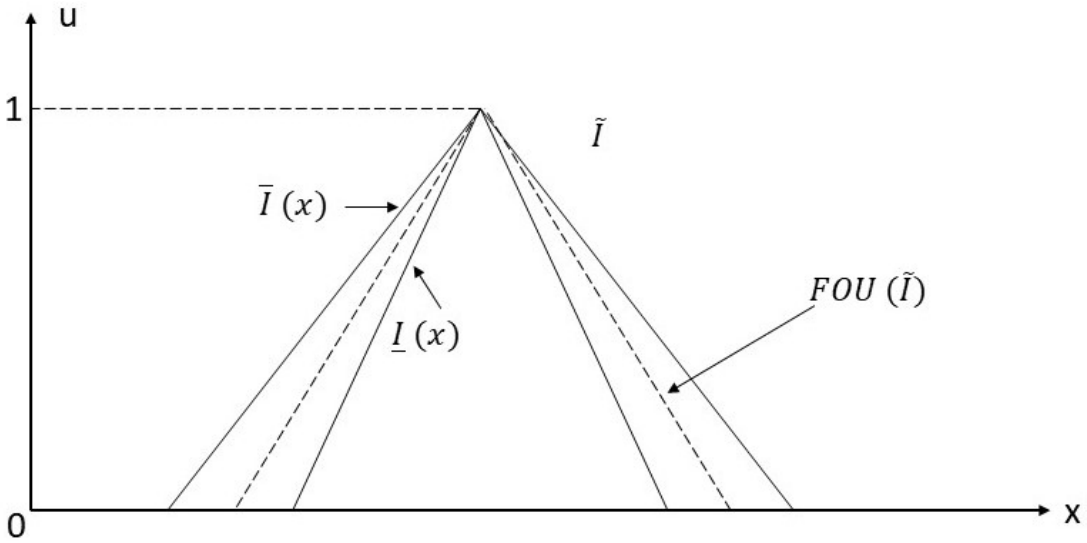


FIGURE 1. IT2FS

Definition 2.2. An IFS $\tilde{\mathfrak{J}}$ has the form $\tilde{\mathfrak{J}} = ([\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}]; \lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}, \eta_{\tilde{\mathfrak{J}}})$ where its trapezoidal membership function $\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x})$ is described as follows:

$$\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{p})h_{\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}}}{\mathfrak{q}-\mathfrak{p}} & \mathfrak{p} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{q} \\ h_{\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}} & \mathfrak{q} \leq \mathfrak{x} \leq \mathfrak{r} \\ \frac{(\mathfrak{r}-\mathfrak{x})h_{\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}}}{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}} & \mathfrak{r} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{r} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

$$\eta_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \frac{(\mathfrak{q}-\mathfrak{x})+h_{\eta_{\tilde{\mathfrak{J}}}}(\mathfrak{x}-\mathfrak{p})}{\mathfrak{q}-\mathfrak{p}} & \mathfrak{p} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{q} \\ h_{\eta_{\tilde{\mathfrak{J}}}} & \mathfrak{q} \leq \mathfrak{x} \leq \mathfrak{r} \\ \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{r})+h_{\eta_{\tilde{\mathfrak{J}}}}(\mathfrak{r}-\mathfrak{x})}{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}} & \mathfrak{r} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{r} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

where $h_{\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}}$ and $h_{\eta_{\tilde{\mathfrak{J}}}}$ are heights of the MF and NMF satisfying $0 \leq h_{\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, $0 \leq h_{\eta_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, $0 \leq h_{\lambda_{\tilde{\mathfrak{J}}}} + h_{\eta_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, and $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r} \in \mathfrak{J}$.

Definition 2.3. In IT2IFS (Yuan and Chao 2019), the type-1 membership is the ordinary fuzzy membership with additional membership as well as NMF. An IT2ITrFS $\tilde{\mathfrak{J}}$ is stated as:

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \int_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{J}} \int_{\mathfrak{u}\in J_{\mathfrak{x}}^{\lambda}} \int_{\mathfrak{u}\in J_{\mathfrak{x}}^{\eta}} \frac{1}{(\mathfrak{x},\mathfrak{u})} = \int_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{J}} [\int_{\mathfrak{u}\in J_{\mathfrak{x}}^{\lambda}} \int_{\mathfrak{u}\in J_{\mathfrak{x}}^{\eta}} \frac{1}{\mathfrak{u}}]/\mathfrak{x} \tag{5}$$

It's lower and upper membership $[\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}(\mathfrak{x})}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}(\mathfrak{x})}]$ and non-membership functions $[\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}(\mathfrak{x})}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}(\mathfrak{x})}]$ are as:

$$\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \frac{(\mathfrak{x}-\acute{\mathfrak{p}})h_{\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}}{\acute{\mathfrak{q}}-\acute{\mathfrak{p}}} & \acute{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{x} < \acute{\mathfrak{q}} \\ h_{\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} & \acute{\mathfrak{q}} \leq \mathfrak{x} \leq \acute{\mathfrak{r}} \\ \frac{(\acute{\mathfrak{r}}-\mathfrak{x})h_{\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}}{\acute{\mathfrak{r}}-\acute{\mathfrak{r}}} & \acute{\mathfrak{r}} \leq \mathfrak{x} < \acute{\mathfrak{r}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

$$\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{p})h_{\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}}{\mathfrak{q}-\mathfrak{p}} & \mathfrak{p} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{q} \\ h_{\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} & \mathfrak{q} \leq \mathfrak{x} \leq \mathfrak{r} \\ \frac{(\mathfrak{r}-\mathfrak{x})h_{\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}}{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}} & \mathfrak{r} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{r} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7}$$

$$\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \frac{(\mathfrak{q}-\mathfrak{x})+h_{\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}(\mathfrak{x}-\mathfrak{p})}{\mathfrak{q}-\mathfrak{p}} & \mathfrak{p} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{q} \\ h_{\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} & \mathfrak{q} \leq \mathfrak{x} \leq \mathfrak{r} \\ \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{r})+h_{\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}(\mathfrak{r}-\mathfrak{x})}{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}} & \mathfrak{r} \leq \mathfrak{x} < \mathfrak{r} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{8}$$

$$\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \frac{(\acute{\mathfrak{q}}-\mathfrak{x})+h_{\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}(\mathfrak{x}-\acute{\mathfrak{p}})}{\acute{\mathfrak{q}}-\acute{\mathfrak{p}}} & \acute{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{x} < \acute{\mathfrak{q}} \\ h_{\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} & \acute{\mathfrak{q}} \leq \mathfrak{x} \leq \acute{\mathfrak{r}} \\ \frac{(\mathfrak{x}-\acute{\mathfrak{r}})+h_{\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}}(\acute{\mathfrak{r}}-\mathfrak{x})}{\acute{\mathfrak{r}}-\acute{\mathfrak{r}}} & \acute{\mathfrak{r}} \leq \mathfrak{x} < \acute{\mathfrak{r}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

Uncertainty is represented as the FOU of $\tilde{\mathfrak{J}}$,

$$\begin{aligned} FOU_{\lambda}(\tilde{\mathfrak{J}}) &= \bigcup_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{J}} J_{\mathfrak{x}}^{\lambda} \\ &= \{(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) : \mathfrak{y} \in J_{\mathfrak{x}} = [\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}), \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x})] \subseteq [0,1]\}. \\ FOU_{\eta}(\tilde{\mathfrak{J}}) &= \bigcup_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{J}} J_{\mathfrak{x}}^{\eta} \\ &= \{(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) : \mathfrak{y} \in J_{\mathfrak{x}} = [\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x}), \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}(\mathfrak{x})] \subseteq [0,1]\}. \end{aligned}$$

where $0 \leq h_{\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, $0 \leq h_{\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, $0 \leq h_{\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, $0 \leq h_{\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, $0 \leq h_{\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} + h_{\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} \leq 1$, $0 \leq h_{\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}} + h_{(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}})} \leq 1$, and $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{r} \in \mathbb{R}$.

The IT2ITrFN is denoted as $\tilde{\mathfrak{J}} = \langle([\mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{r},\mathfrak{r}]; \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}, \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}}), ([\acute{\mathfrak{p}},\acute{\mathfrak{q}},\acute{\mathfrak{r}},\acute{\mathfrak{r}}]; \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}})\rangle$.

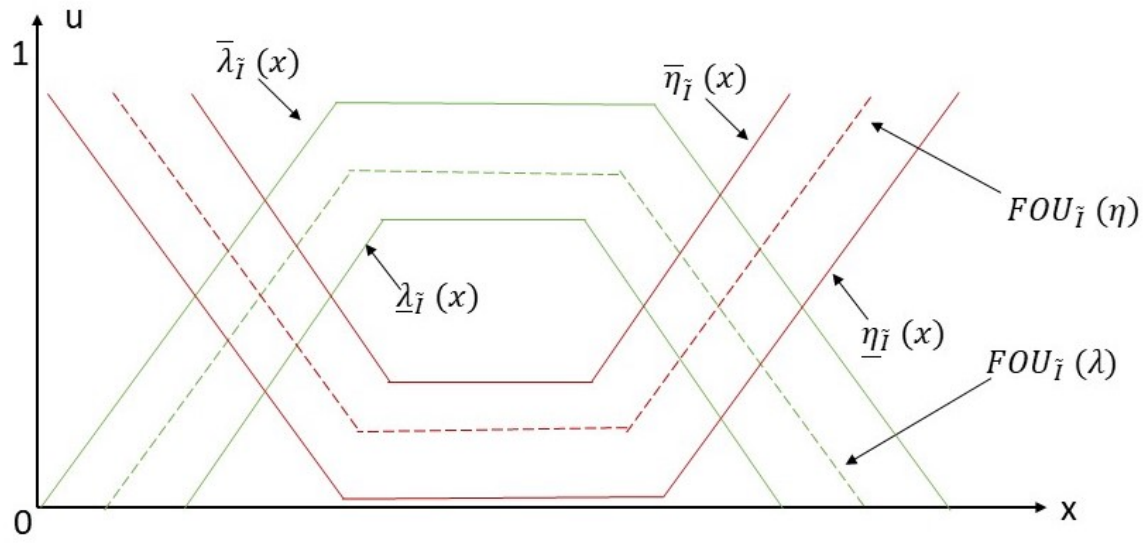


FIGURE 2. IT2ITrFS

Definition 2.4. The weight w and the centroid c of a FS $\tilde{\mathfrak{J}} = (\mathfrak{J}, \lambda)$ are described as follows:

$$w = \int \lambda(\mathfrak{x}) dx \tag{10}$$

and

$$c = \frac{\int \mathfrak{x}\lambda(\mathfrak{x}) dx}{\int \lambda(\mathfrak{x}) dx} \tag{11}$$

Definition 2.5. The centroid $C_{\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}}}$ of IT2FS, given an IT2FS with an embedded T1FS $\mathfrak{J}_\lambda$, $\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}}$ is the union of all $\mathfrak{J}_\lambda$ centroids (Wu and Mendel 2007).

$$C_{\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}}} = \bigcup_{\forall \mathfrak{J}_\lambda} c(\mathfrak{J}_\lambda) = \bigcup_{\forall \mathfrak{J}_\lambda} \frac{\int_{\mathfrak{J}} \mathfrak{x} \lambda_{\mathfrak{J}_\lambda}(\mathfrak{x}) dx}{\int_{\mathfrak{J}} \lambda_{\mathfrak{J}_\lambda}(\mathfrak{x}) dx} = [c_l(\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}}), c_r(\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}})] \tag{12}$$

where the centroid of $\mathfrak{J}_\lambda$ is $c(\mathfrak{J}_\lambda)$, and for every $\mathfrak{J}_\lambda$, the centroid with the lowest value is $c_l(\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}})$, and the centroid with the highest value is $c_r(\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}})$. Using the KM algorithm (Liu and Mendel 2008), $c_l(\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}})$ and $c_r(\tilde{\tilde{\mathfrak{J}}})$ may be calculated.

Definition 2.6. A similarity measure s must satisfies the following for any fuzzy sets $\tilde{\mathfrak{J}}_1$, $\tilde{\mathfrak{J}}_2$, $\tilde{\mathfrak{J}}_3$:

(1) ***Reflexivity:*** If and only if two fuzzy sets (FSs) are exact identical, then their similarity is 1, expressed as $s(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mathfrak{J}}_1 = \tilde{\mathfrak{J}}_2$.

(2) ***Symmetry:*** The order of computation should not affect the similarity between two FSs; in other words, $s(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$ should be the same as $s(\tilde{\mathfrak{J}}_2, \tilde{\mathfrak{J}}_1)$.

(3) ***Monotonicity:*** As the distance between two FSs increases, their similarity decreases. If $\tilde{\mathfrak{J}}_1 \subseteq \tilde{\mathfrak{J}}_2 \subseteq \tilde{\mathfrak{J}}_3$, then $s(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_3) \leq s(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$ and $s(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_3) \leq s(\tilde{\mathfrak{J}}_2, \tilde{\mathfrak{J}}_3)$.

(4) ***Overlapping:*** If the intersection of two fuzzy sets is non-empty, there should be some level of similarity between them. This can be expressed as follows: if $\tilde{\mathfrak{J}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{J}}_2 \neq \emptyset \Rightarrow s(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) > 0$.

Definition 2.7. In (Wu and Mendel 2007), it has been described that assessing the resemblance among IT2FSs $\tilde{\mathfrak{J}_1}$ and $\tilde{\mathfrak{J}_2}$, it is crucial to consider both their shapes and proximity. The VSM for IT2FSs, stated by Wu and Mendel, comprises two components, namely,

$$s_{vsm}(\tilde{\mathfrak{J}_1}, \tilde{\mathfrak{J}_2}) = (s_1(\tilde{\mathfrak{J}_1}, \tilde{\mathfrak{J}_2}), s_2(\tilde{\mathfrak{J}_1}, \tilde{\mathfrak{J}_2})^T \tag{13}$$

where the degree of similarity between each of the shapes of $\tilde{\mathfrak{J}_1}$ and $\tilde{\mathfrak{J}_2}$ is represented by $s_1(\tilde{\mathfrak{J}_1}, \tilde{\mathfrak{J}_2}) \in [0, 1]$, and $s_2(\tilde{\mathfrak{J}_1}, \tilde{\mathfrak{J}_2}) \in [0, 1]$. is a metric of similarity between $\tilde{\mathfrak{J}_1}$ and $\tilde{\mathfrak{J}_2}$ in terms of their distance. To compute $s_1\tilde{\mathfrak{J}_1}, \tilde{\mathfrak{J}_2})$, $\tilde{\mathfrak{J}_1}$ and $\tilde{\mathfrak{J}_2}$ are *aligned* for shape comparison. Denote the centroids of $\tilde{\mathfrak{J}_1}$ and $\tilde{\mathfrak{J}_2}$ as $C_{\tilde{\mathfrak{J}_1}} = [c_l(\tilde{\mathfrak{J}_1}), c_r(\tilde{\mathfrak{J}_1})]$ and $C_{\tilde{\mathfrak{J}_2}} = [c_l(\tilde{\mathfrak{J}_2}), c_r(\tilde{\mathfrak{J}_2})]$, respectively. The centers of $C_{\tilde{\mathfrak{J}_1}}$ and $C_{\tilde{\mathfrak{J}_2}}$ are defined as

$$c(\tilde{\mathfrak{J}_1}) = \frac{[c_l(\tilde{\mathfrak{J}_1}), c_r(\tilde{\mathfrak{J}_1})]}{2}$$
$$c(\tilde{\mathfrak{J}_2}) = \frac{[c_l(\tilde{\mathfrak{J}_2}), c_r(\tilde{\mathfrak{J}_2})]}{2}$$

Moving $\tilde{\mathfrak{I}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ so that $c(\tilde{\mathfrak{I}}_1)$ and $c(\tilde{\mathfrak{I}}_2)$ coincide is a suitable alignment procedure. When $\tilde{\mathfrak{I}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ are aligned, $s_1(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2)$ is defined as,

$$s_1(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = \frac{AC(\tilde{\mathfrak{I}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{I}}_2')}{AC(\tilde{\mathfrak{I}}_1 \cup \tilde{\mathfrak{I}}_2')} = \frac{card(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cap \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}) + card(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cap \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})}{card(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cup \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}) + card(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cup \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})} \tag{14}$$

where $\tilde{\mathfrak{I}}_2'$ is $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ moved to $\tilde{\mathfrak{I}}_1$.
$s_2(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2)$ gauges the proximity of $\tilde{\mathfrak{I}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_2$, and it is defined as

$$s_2(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = h(d(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2)) \tag{15}$$

where

$$d(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = |c(\tilde{\mathfrak{I}}_1) - c(\tilde{\mathfrak{I}}_2)| \tag{16}$$

is the Euclidean distance among the respective centers of the centroids of $\tilde{\mathfrak{I}}_1$ as well as $\tilde{\mathfrak{I}}_2$, while h may correspond to any function satisfying: A monotonic reduction in $h(\mathfrak{x})$ occurs as $\mathfrak{x}$ increases, (2) $h(\mathfrak{x}) = 1 \iff \mathfrak{x} = 0$, and (3) $\lim_{\mathfrak{x}\to\infty} h(\mathfrak{x}) = 0$.

3. Centroid of IT2IFS

A fuzzy set's centroid is an essential metric, providing a representative point that summarizes the central tendency of the set's membership distribution. In the realm of IT2IFS (IT2IFS), the centroid becomes an even more intricate concept, capturing not only the uncertainty in membership but also the intuitionistic hesitation associated with each element.

Each element in an IT2IFS has a membership interval as well as a non-membership interval, providing a more thorough depiction of uncertainty. The degree of hesitation or uncertainty in the process of making choices is taken into account by the intuitionistic component, which adds another level of complexity.

An IT2IFS's centroid involves the calculation of a representative point within the combined uncertainty space defined by both the membership and non-membership intervals. This representative point not only considers the central tendency of the membership distribution but also incorporates the nuances introduced by the intuitionistic factor.

In mathematical terms, the centroid of an IT2IFS is established by a weighted average that takes into account the intuitionistic component as well as traditional membership and non-membership degrees. Resulting centroid provides a valuable insight into the central tendency of the fuzzy set while accounting for the multifaceted nature of uncertainty inherent in complex decision-making scenarios.

In the subsequent definition, we provide the formal expression for computing the centroid of an IT2IFS, clarifying each element's contribution to encapsulating the core of ambiguity in the set. Let $\mathfrak{I}_\lambda$ and $\mathfrak{I}_\eta$ be an embedded type-2 MF and NMF of an IT2IFS $\tilde{\mathfrak{I}}$. The centroids

of MF and NMF of $\tilde{\mathfrak{J}}$ are defined as:

$$C_{\tilde{\mathfrak{J}}}^{\lambda} = \bigcup_{\forall \mathfrak{J}_{\lambda}} c(\mathfrak{J}_{\lambda}) = \bigcup_{\forall \mathfrak{J}_{\lambda}} \frac{\int_{\mathfrak{J}} \mathfrak{x} \lambda_{\mathfrak{J}_{\lambda}}(\mathfrak{x}) dx}{\int_{\mathfrak{J}} \lambda_{\mathfrak{J}_{\lambda}}(\mathfrak{x}) dx} = [c_l^{\lambda}(\tilde{\mathfrak{J}}), c_r^{\lambda}(\tilde{\mathfrak{J}})] \tag{17}$$

where

$$c_l^{\lambda}(\tilde{\mathfrak{J}}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \overline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}} + \sum_{i=k+1}^{L} x_i \underline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}}}{\sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}} + \sum_{i=k+1}^{L} \underline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}}} \tag{18}$$

$$c_r^{\lambda}(\tilde{\mathfrak{J}}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \underline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}} + \sum_{i=k+1}^{R} x_i \overline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}}}{\sum_{i=1}^{k} \underline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}} + \sum_{i=k+1}^{R} \overline{\lambda}_{\mathfrak{J}_{\lambda}}} \tag{19}$$

and

$$C_{\tilde{\mathfrak{J}}}^{\eta} = \bigcup_{\forall \mathfrak{J}_{\eta}} c(\mathfrak{J}_{\eta}) = \bigcup_{\forall \mathfrak{J}_{\eta}} \frac{\int_{\mathfrak{J}} \mathfrak{x} \eta_{\mathfrak{J}_{\eta}}(\mathfrak{x}) dx}{\int_{\mathfrak{J}} \eta_{\mathfrak{J}_{\eta}}(\mathfrak{x}) dx} = [c_l^{\eta}(\tilde{\mathfrak{J}}), c_r^{\eta}(\tilde{\mathfrak{J}})] \tag{20}$$

where

$$c_l^{\eta}(\tilde{\mathfrak{J}}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \underline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}} + \sum_{i=k+1}^{L} x_i \overline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}}}{\sum_{i=1}^{k} \underline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}} + \sum_{i=k+1}^{L} \overline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}}} \tag{21}$$

$$c_r^{\eta}(\tilde{\mathfrak{J}}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \overline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}} + \sum_{i=k+1}^{R} x_i \underline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}}}{\sum_{i=1}^{k} \overline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}} + \sum_{i=k+1}^{R} \underline{\eta}_{\mathfrak{J}_{\eta}}} \tag{22}$$

where k is the switch point.

4. **Extended Vector Similarity Measure for IT2IFS**

Within the context of IT2IFS, assessing similarity goes beyond a straightforward comparison of shapes; it necessitates a comprehensive evaluation of both form and the distance. The *Extended Vector Similarity Measure* (EVSM) in context of IT2IFS, encapsulates this dual perspective by decomposing the overall similarity into two components.

The EVSM is expressed as a vector $S_{EVSM}(\tilde{A}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$, where each component serves a distinct purpose. The first component, $s_1(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$, quantifies the similarity in shape between the IT2IFSs $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{J}}_2$. This shape-based similarity takes into account the alignment of the sets, ensuring a meaningful comparison. The second component, $s_2(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$, focuses on the proximity of $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{J}}_2$, measuring how closely they are positioned in the fuzzy space. The vector similarity measure is expressed as:

$$S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) = (s_1(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2), s_2(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)^T$$

where $s_1(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$ and $s_2(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$ are both confined to the interval $[0, 1]$.

To compute s_1, a crucial step involves aligning $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{J}}_2$ by adjusting their positions in a manner that their centroids coincide. This alignment facilitates the comparison of their

shapes. $s_1(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2)$ is then computed as the ratio of the average cardinality of UMF, LMF, UNMF, and LNMF intersection to the average cardinality of corresponding unions.

$$
\begin{aligned}
s_1(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) &= \frac{AC(\tilde{\mathfrak{I}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{I}}_2')}{AC(\tilde{\mathfrak{I}}_1 \cup \tilde{\mathfrak{I}}_2')} \\
&= \frac{card(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cap \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})) + card(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cap \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})) + card(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cap \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})) + card(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cap \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))}{card(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cup \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})) + card(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cup \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})) + card(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cup \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x})) + card(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}) \cup \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))} \\
&= \frac{\int_{\mathfrak{I}} \min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{I}} \min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{I}} \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{I}} \min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx}{\int_{\mathfrak{I}} \max(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{I}} \max(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{I}} \max(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{I}} \max(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2'}(\mathfrak{x}))dx}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

where $\tilde{\mathfrak{I}}_2'$ is $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ that has been moved to $\tilde{\mathfrak{I}}_1$.

The second component, $s_2(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2)$, assesses the proximity between $\tilde{\mathfrak{I}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_2$, the Euclidean distance that lies between the centers from $\tilde{\mathfrak{I}}_1$ to $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ determines it, denoted as $d(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2)$. The function h further scales this distance, adhering to specific properties.

$$
s_2(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = h(d(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2)) \tag{24}
$$

where

$$
d(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = |c(\tilde{\mathfrak{I}}_1) - c(\tilde{\mathfrak{I}}_2)|
$$

Any function satisfying the following can be h. (1) monotonic reduction in $h(\mathfrak{x})$ occurs as $\mathfrak{x}$ increases, (2) $h(\mathfrak{x}) = 1 \iff \mathfrak{x} = 0$, and (3) $\lim_{\mathfrak{x}\to\infty} h(\mathfrak{x}) = 0$. The extended vector similarity measure, therefore, provides a nuanced evaluation of the similarity between IT2IFSs, accounting for both their shapes and proximity. This comprehensive approach enables a more robust comparison, making it a valuable tool in decision-making processes where uncertainty is inherent.

Theorem 4.1. *The EVSM meets the requirements for reflexivity, symmetry, monotonicity and overlapping.*

Proof. (1) ***Reflexivity:*** To show that S_{EVSM} is reflexive, let us suppose that $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mathfrak{I}}_1 = \tilde{\mathfrak{I}}_2$.

The only way that $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = 1$ is possible when $\min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$,$\min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$, $\min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$ and $\min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$, which implies that $\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$,$\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$, $\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$ and $\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$ which shows that $\tilde{\mathfrak{I}}_1 = \tilde{\mathfrak{I}}_2$.

Conversely, $\tilde{\mathfrak{I}}_1 = \tilde{\mathfrak{I}}_2$ means that $\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$,$\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$, $\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$ and $\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1} = \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}$ which implies that $\min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$,$\min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$, $\min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$ and $\min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2}) = \max(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{I}}_2})$, which follows that $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{I}}_1, \tilde{\mathfrak{I}}_2) = 1$

(2) ***Symmetry:*** Symmetry of S_{EVSM} is obvious as $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2)$ does not rely on the sequence in which $\tilde{\mathfrak{J}}_1$ and $\tilde{\mathfrak{J}}_2$ so $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) = S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_2, \tilde{\mathfrak{J}}_1)$

(3) ***Monotonicity:*** Let $\tilde{\mathfrak{J}}_1 \subseteq \tilde{\mathfrak{J}}_2 \subseteq \tilde{\mathfrak{J}}_3$, then

$S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) =$

$$\frac{\int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx}{\int_{\mathfrak{J}} \max(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \max(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \max(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \max(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}(\mathfrak{x}))dx} \tag{25}$$

$$S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) = \frac{\int_{\mathfrak{J}} \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1} + \int_{\mathfrak{J}} \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}}{\int_{\mathfrak{J}} \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2} + \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}} \tag{26}$$

$S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_3) =$

$$\frac{\int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\lambda}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\lambda}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\eta}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\eta}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx}{\int_{\mathfrak{J}} \max(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\lambda}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \max(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\lambda}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \max(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \overline{\eta}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx + \int_{\mathfrak{J}} \max(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}(\mathfrak{x}), \underline{\eta}_{\tilde{C}}(\mathfrak{x}))dx} \tag{27}$$

$$S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_3) = \frac{\int_{\mathfrak{J}} \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1} + \int_{\mathfrak{J}} \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}}{\int_{\mathfrak{J}} \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3} + \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3}} \tag{28}$$

because $\tilde{\mathfrak{J}}_2 \subseteq \tilde{\mathfrak{J}}_3$, it follows that $\int_{\mathfrak{J}} \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2} + \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2} \leq \int_{\mathfrak{J}} \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3} + \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3} + \int_{\mathfrak{J}} \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_3}$, hence $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) \geq S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_3)$. Similarily it can be shown that $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_2, \tilde{\mathfrak{J}}_3) \geq S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_3)$

(4) ***Overlapping:*** If $\tilde{\mathfrak{J}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{J}}_2 \neq \varnothing$, $\exists \mathfrak{x}$ such that $\min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}$ and $\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) > 0, \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) > 0$, then the numerator of (23),

$$\int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) > 0 \tag{29}$$

In the denominator of (23),

$$\int_{\mathfrak{J}} \max(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \max(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \max(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \max(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) \geq$$
$$\int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) > 0 \tag{30}$$

Consequently, $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) > 0$. On the other hand, when $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) = 0$, then $\min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) = \min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) = \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) = \min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) = 0 \ \forall \mathfrak{x}$, then in the numerator of (23)

$\int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\lambda}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \overline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) + \int_{\mathfrak{J}} \min(\underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_1}, \underline{\eta}_{\tilde{\mathfrak{J}}_2}) = 0$

consequently, Consequently, $S_{EVSM}(\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2) = 0$.

0.1cm□

5. **Application**

This section presents examples pertaining to MADM in an interval type-2 intuitionistic setting in order to show the usefulness and practicality of the suggested methodology.

5.1. *Smog Control*

In Lahore, persistent smog poses a significant environmental challenge, primarily stemming from vehicular emissions, industrial pollutants, and agricultural residue burning. High traffic density contributes to elevated levels of nitrogen oxides and particulate matter, while unregulated industrial emissions further worsen air quality. The practice of burning crop residues adds to the smog problem, releasing pollutants into the atmosphere. To address this issue, three potential air quality improvement measures have been considered. First, $\mathfrak{I}_1$ the introduction of electric buses aims to reduce pollutants significantly, with moderate cost-effectiveness and positive social acceptance due to heightened environmental awareness. Second, $\mathfrak{I}_2$ the implementation of stricter emission standards for industries targets a moderate reduction in pollutants, offers good cost-effectiveness over the long term, and may face initial resistance. Third, $\mathfrak{I}_3$ afforestation projects seek to improve air quality by enhancing green cover, resulting in moderate reductions in pollutants, cost-effectiveness, and high social acceptance. The key attributes for evaluation are C_1 reduction in pollutants, C_2 cost-effectiveness, and C_3 social acceptance. To determine the most suitable solution, EVSM using IT2IFS will be employed, considering the uncertainties associated with each attribute value for a comprehensive decision-making process.

	C_1	C_2	C_3
$\mathfrak{I}_1$	[(4,6,7,9;0.1,0.9),(5,6,7,8;0.3,0.6)]	[(1,3,4,6;0.3,0.7),(2,3,4,5;0.4,0.5)]	[(2,4,5,7;0.2,0.8),(3,4,5,6;0.3,0.6)]
$\mathfrak{I}_2$	[(3,5,7,9;0.2,0.7),(4,5,7,8;0.3,0.6)]	[(4,6,7,8;0.2,0.8),(5,6,6,7;0.3,0.7)]	[(2,4,6,8;0.2,0.7),(3,4,6,7;0.3,0.5)]
$\mathfrak{I}_3$	[(5,7,8,10;0.1,0.9),(6,7,8,9;0.2,0.7)]	[(1,4,5,7;0.3,0.7),(2,4,5,6;0.4,0.5)]	[(3,5,7,9;0.2,0.8),(4,5,7,8;0.3,0.7)]

Table 1. IT2IFS based decision matrix

We compare the alternative values on the criterias with the ideal solution
$\mathfrak{I}^* = [(5,7,8,10;0,1),(6,7,8,9;0,0.9)]$.

In conclusion, the comprehensive evaluation of air quality improvement measures for Lahore, considering the pivotal criteria of pollutants reduction, cost-effectiveness, and social acceptance, reveals that "afforestation projects" emerge as the most suitable solution. The implementation of afforestation projects is anticipated to yield moderate reductions in pollutants, presenting a harmonious balance with favorable cost-effectiveness and high levels of social acceptance. This result underscores the importance of not only addressing environmental

	C_1	C_2	C_3
$\tilde{\mathfrak{I}}_1$	0.9588	0.4725	0.3729
$\tilde{\mathfrak{I}}_2$	0.9113	0.5265	0.5821
$\tilde{\mathfrak{I}}_3$	0.9657	0.4825	0.9836
Ranking order	$\tilde{\mathfrak{I}}_3 > \tilde{\mathfrak{I}}_1 > \tilde{\mathfrak{I}}_2$	$\tilde{\mathfrak{I}}_2 > \tilde{\mathfrak{I}}_3 > \tilde{\mathfrak{I}}_1$	$\tilde{\mathfrak{I}}_3 > \tilde{\mathfrak{I}}_2 > \tilde{\mathfrak{I}}_1$

TABLE 2. Decision matrix on applying EVSM

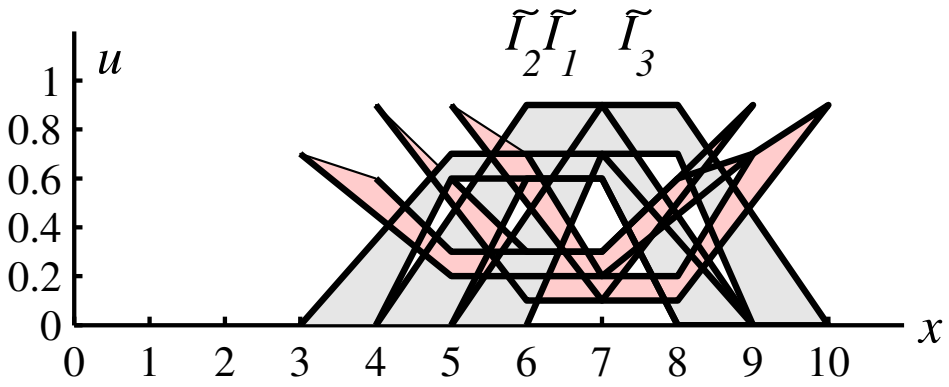


FIGURE 3. Comparison of $\tilde{\mathfrak{I}}_1$, $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_3$ on the basis of C_1

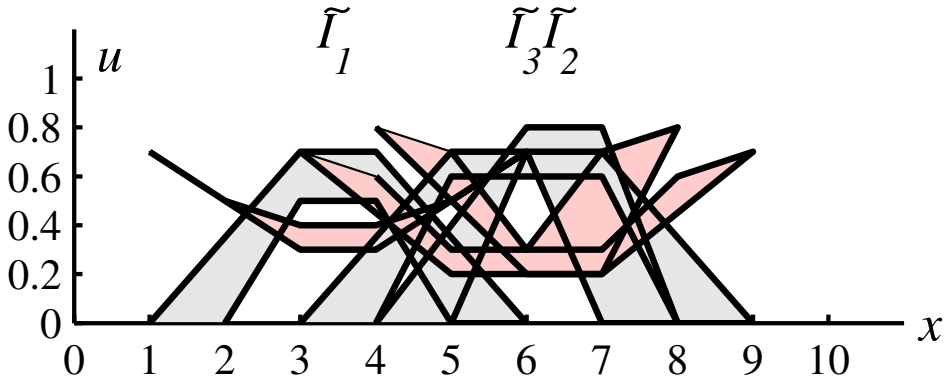


FIGURE 4. Comparison of $\tilde{\mathfrak{I}}_1$, $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_3$ on the basis of C_2

concerns through pollutant reduction but also considering the economic viability and societal approval of the chosen measure. Afforestation, with its potential to enhance green cover and contribute to the city's ecological health, stands out as the optimal choice in mitigating the pervasive smog issue in Lahore. This decision not only aligns with ecological sustainability but also acknowledges the social dynamics and economic considerations crucial for the successful implementation of air quality improvement initiatives.

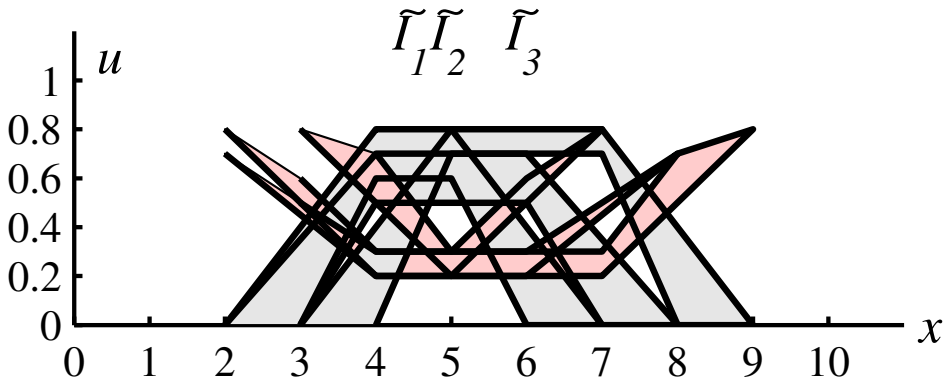


FIGURE 5. Comparison of $\tilde{\mathfrak{I}}_1$, $\tilde{\mathfrak{I}}_2$ and $\tilde{\mathfrak{I}}_3$ on the basis of C_1

6. Conclusion

In conclusion, this paper has delved into the intricacies of the centroid computation for IT2IFS and provided a comprehensive exploration of the EVSM applied to IT2IFS. By establishing a clear understanding of these mathematical concepts, we have showcased their potential in addressing real-world challenges. The practical application of EVSM in controlling smog in Lahore serves as a noteworthy example, demonstrating the versatility and effectiveness of these methods. As we navigate the complexities of environmental issues, the knowledge gathered from this study can help create solid plans and tactics for handling and lessening environmental problems on a larger scale. The integration of theoretical foundations with practical applications underscores the significance of bridging the gap between academic knowledge and real-world problem-solving, highlighting the potential for continued advancements in the realm of fuzzy logic and environmental control.

References

1. Atanassov, K. T. (1986) Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Set. Syst. 20(1):87-96.
2. Atanassov, K. T. (1989) More on intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Set. Syst. 33:37-46.
3. Liu, F., Mendel, J. M. (2008) Aggregation using the fuzzy weighted average as computed by the Karnik-Mendel algorithms. IEEE T. Fuzzy Syst. 16(1):1-12.
4. Liu, F., Mendel, J. M. (2009) Perceptual reasoning for perceptual computing: A similarity-based approach. IEEE T. Fuzzy Syst. 17(6):1397-1411.
5. Mendel, J. M. (2001) Rule-based fuzzy logic systems: introduction and new directions. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
6. Mendel, J. M. (2002) An architecture for making judgments using computing with words. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 12(3):325-335.
7. Mendel, J. M., John, R. B. (2002) Type-2 fuzzy sets made simple, IEEE T. Fuzzy Syst. 10(2):117-127.
8. Mendel, J. M., John, R. I., Liu, F. L. (2006) Interval type-2 fuzzy logical systems made simple, IEEE T. Fuzzy Syst. 14(6):808-821.

9. Mendel, J. M., Hagras, H., John, R. I. (2006) Standard background material about interval type-2 fuzzy logic systems that can be used by all authors.
10. Mendel, J. M. (2007) Advances in type-2 fuzzy sets and systems, Inform. Sciences 177:84-110.
11. Nikravesh, M. (2005) Soft computing for reservoir characterization and management. IEEE Int. Conf. on Granular Computing, Vol. 2:593-598.
12. Rickard, J. T., Aisbett, J., Morgenthaler, D. G., Yager, R. R. (2019) Modeling of complex system phenomena via computing with words in fuzzy cognitive maps. IEEE T. Fuzzy Syst. 28(12):3122-3132.
13. Song, S., Johnson, A. P. (2023) Predicting Drug Review Polarity Using the Combination Model of Multi-Sense Word Embedding and Fuzzy Latent Dirichlet Allocation (FLDA). IEEE Access 11:118538-118546.
14. Touqeer, M., Shaheen, K., Irfan, R. (2020) Evaluation model for manufacturing plants with linguistic information in terms of three trapezoidal fuzzy numbers. J. Intell. Fuzzy Syst. 38(5):5969-5978.
15. Touqeer, M., Umer, R., Ahmadian, A., Salahshour, S., Ferrara, M. (2021) An optimal solution of energy scheduling problem based on chance-constraint programming model using Interval-valued neutrosophic constraints. Optim. Eng.:1-29.
16. Touqeer, M., Umer, R., Ahmadian, A., Salahshour, S. (2021) A novel extension of TOPSIS with interval type-2 trapezoidal neutrosophic numbers using $(\alpha, \beta, \gamma\ )$-cuts. RAIRO Oper. Res. 55(5):2657-2683.
17. Touqeer, M., Umer, R., Ali, M. I. (2021) A Chance-constraint Programming Model with Interval-valued Pythagorean Fuzzy Constraints. J. Intell. Fuzzy Syst. 40(6):11183–11199.
18. Umer, R., Touqeer, M., Omar, A. H., Ahmadian, A., Salahshour, S., Ferrara, M. (2021) Selection of solar tracking system using extended TOPSIS technique with interval type-2 pythagorean fuzzy numbers. Optim. Eng. 22:2205-2231.
19. Touqeer, M., Umer, R., Ahmad, M. N., Salimi, M., Ahmadian, A. (2023) Signed distance-based approach for multiple criteria group decision-making with incomplete information using interval type-2 neutrosophic numbers. Multimed. Tools Appl.:1-28.
20. Wu, D., Mendel, J. M. (2007) A vector similarity measure for interval type-2 fuzzy sets. In: 2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference, pp. 1-6. IEEE.
21. Yuan, W., Chao, L. (2019) Online Evolving Interval Type-2 Intuitionistic Fuzzy LSTM-Neural Networks for Regression Problems. IEEE Access 7:35544-35555.
22. Zadeh, L. A. (1996) Fuzzy logic = computing with words. IEEE T. Fuzzy Syst. 4(2):103-111.
23. Zadeh, L. A. (1999) From computing with numbers to computing with words. From manipulation of measurements to manipulation of perceptions. IEEE T. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl. 46(1):105-119.
24. Zadeh, L. A. (1965) Fuzzy sets. Inform. Control 8(3):338-353.

7. **Ethical Approval**

Not applicable.

8. **Consent to Participate**

Not applicable.

9. **Consent to Publish**

Not applicable.

10. **Authors Contributions**

Touqeer conceived and designed the analysis of the proposed scheme. Sajeela has worked out the Mathematical models and wrote the paper.

11. **Funding**

The authors did not receive support from any organization for the submitted work.

12. **Competing Interests**

The authors declare that they have no competing interests.

Article:

Introduction to Neutrosophic Philosophy: Application of Neutrosophic Logic to Philosophy

مدخل إلى الفلسفة الحيادية: تطبيق المنطق النيوتروسوفي على تطور الأفكار الفلسفية

Kachchouh Mustapha *

Affiliation: Professor of Logic and Philosophy of Science, Department of Philosophy, Faculty of Arts and Human Sciences, Dhar El Mahraz, University of Sidi Mohammed Ben Abdellah Fez, Morocco.

* Correspondence:
kachchouh.mustapha@gmail.com// mustapha.kachchouh@usmba.ac.ma// **Tel.: (002126509650)**

Received: 05 21, 2024; *Accepted:* 05 23, 2024.

Abstract: In this paper, we aim to apply Neutrosophic Logic (founded by Florentine Smarandache 1995) to philosophy (philosophical ideas and doctrines). This application is determined by the following points: 1) The Neurosophic perspective of philosophical ideas: paradoxes and contradictions in philosophy.2) Nature and classification of philosophical ideas. 3) the Evolution of philosophical ideas. 4) The laws governing philosophical ideas.

Keywords: Neutrosophic Logic, Neurosophy, philosophy, Paradoxes, contradictions, Philosophical Laws**.**

ملخص: نهدف من خلال هذه الورقة إلى تطبيق المنطق الرياضي النيوتروسوفي عند فلورنتين سمارانداكه على تطور الأفكار والمذاهب الفلسفية، ويتحدد هذا التطبيق من خلال النقط التالية: 1) المنظور النيوتروسوفي للأفكار الفلسفية: التناقضات والمفارقات في قلب التفكير الفلسفي. 2) طبيعة وتصنيف الأفكار الفلسفية. 3) تطور الأفكار الفلسفية 4) القوانين المتحكمة في تطور الأفكار الفلسفية.

الكلمات المفتاحية: المنطق النيوتروسوفي – الفلسفة – النيوتروسوفيا – المفارقات – التناقضات – القوانين الفلسفية.

مقدمة:

أسس فلورنتين سمارنداكه (Florentine smarandache) المنطق النيوتروسوفي نهاية القرن العشرين، وهو جزء من النيوتروسوفيا[1]، يقدمه صاحبه كمنهج جديد للتفكير في الواقع العلمي المعاصر (الواقع الرياضي /الواقع الطبيعي). ينطلق هذا المنطق من فكرة أساسية مفادها أن:" كل قضية منطقية أو واقعة علمية أو فكرة فلسفية لها جانب من الصدق أو الحقيقة وجانب من الكذب أو اللاحقيقة وجانب من اللاتحديد أو الحياد وفي هذا الجانب يختلط الصدق بالكذب وتنشط التناقضات والمفارقات والقضايا غير المحددة". انطلاقا من هذه الفكرة، تتوجه هذه الورقة نحو تطبيق المنطق النيوتروسوفي على الأفكار والمذاهب الفلسفية، ونسمي هذا التطبيق باسم النيوترو–فلسفة (Neutro-philosophy)أو الفلسفة الحيادية (Neutrosophic philosophy)، ونعني بها نظرة المنطق النيوتروسوفي للأفكار الفلسفية، وهي نظرة تحاول أن تنمذج القول الفلسفي داخل بناء رياضي مرن. وتستند على مسلمة أساسية تنص على أن ما يحكم تطور الأفكار الفلسفية هو المفارقات المنطقية. سنحاول الوقوف على هذا التطبيق انطلاقا من أربع نقط أساسية: المنظور النيوتروسوفي لتطور الأفكار الفلسفية– تصنيف الأفكار الفلسفية– مجرى تطور الأفكار الفلسفية– القوانين المتحكمة في تطور الأفكار الفلسفية.

[1] تتألف كلمة النيوتروسوفيا (Neutrosophy) على الصعيد الإيتمولوجي أو الاشتقاقي اللغوي من مقطعين: الأول نيوترو (Neutro) ويقترب هذا المصطلح من المصطلح الفرنسي (Neutre) والمصطلح الأنجليزي (Neutral) ويعني في الحالتين معا محايد، والمقطع الثاني من الكلمة هو (Sophy) أو (Sophia) هي كلمة يونانية، تعني الحكمة والمعرفة والعلم، وبتجميع المقطعين نحصل على المعنى اللغوي للنيوتروسوفيا: معرفة الفكر المحايد.

1) المنظور النيوتروسوفي لتطور الأفكار الفلسفية: المفارقات في قلب التفكير الفلسفي

إذا كان العالم –وأيضا التقني–يجعل من المختبر والمعمل الأرضية التي يبني عليها نظريته ومعرفته العلمية، فإن مختبر الفيلسوف ومعمله هو تاريخ الفلسفة، فمنه ينهل ويأخذ موارده الأساسية. لذلك، محكوم على أي فلسفة أن ترتبط بالشرط التاريخي كشرط أساسي لوجودها، ومن هنا توجه النيوتروسوفيا عملها نحو تاريخ الفلسفة لتخبرنا أن الفلسفة ولدت من رحم المفارقات، فإذا كانت الأعداد الأولية هي النواة الصلبة التي تحكم الفكر الرياضي، فإن المفارقات هي النواة الصلبة التي تحكم الفكر الفلسفي، منذ عصر اليونان إلى اليوم، لأن المفارقات تثير وراءها العديد من الأسئلة الصعبة التي لا حل لها، والفكر الفلسفي الأصيل هو الفكر الذي يتقصى هذه الأسئلة محاولاً الجواب عنها، وذلك بابتكار طرق جديدة في التفكير تسمح بالجواب عنها، وبالتالي فإن حل تلك المفارقات يؤدي إلى تقدم وتطور الفكر الفلسفي [3].

تنطلق النيوتروسوفيا عموما والمنطق النيوتروسوفي على وجه الخصوص في دراستهما لتطور الأفكار الفلسفية من أطروحة أساسية مفادها أن كل الأفكار(الفلسفية) التي لازالت غير متناقضة ستصبح حتما في يوم ما متناقضة، وأن كل الأفكار المتناقضة والمتحاربة ستعيش يوما ما في سلام[6]، لأن فلسفة الحاضر لا تحيا إلا على شروخ وتناقضات فلسفة الماضي، والخطاب نفسه ينطبق على النيوتروسوفيا . لذلك فهذه الفلسفة ليست فلسفة مثالية وإنما واقعية تعرف حدودها جيدًا، وهذه النقطة الجوهرية تميزها عن الفلسفة الجدلية عند فريدريك هيغل. فإذا كانت الفلسفة المثالية الهيغيلية تجعل من نفسها فلسفة لنهاية التاريخ، ويجب على كل فلسفة أن تتطابق معها في نهاية التاريخ. فإن مقولة نهاية التاريخ لا نجد لها أي موقع داخل النيوتروسوفيا، لأنها لا تفرض على التاريخ أن ينتهي عند نقطة محددة، وإنما هي كسيرورة منفتحة ولا–متناهية. ومثلما تجاوزت النيوتروسوفيا العقلانية التقليدية وأسست لنوع من العقلانية الحيادية التي توظف المفارقات في المجالات الإبداعية والتحليلية، سيأتي

يوم وتنقلب على أعقابها. يقول فلورنتين سمارانداكه:" إن كل الأفكار الفلسفية التي لا زالت غير متناقضة سوف تصبح عاجلاً أو آجلاً متناقضة، لأن كل فيلسوف يسعى إلى إيجاد شرخ في الأنساق القديمة. وحتى هذه النظرية الجديدة (والتي أنا متأكد من أنها ليست أكيدة إلى حد ما) سوف تنقلب رأساً على عقب...، وفيما بعد، سيقوم آخرون بتنصيبها في الخلف [6]. " ولا يجب النظر إلى هذا الاعتراف كنقطة ضعف، وإنما كنقطة قوة شديدة، لأن هذه الفلسفة تعرف حدودها ولا تحاول أن تضفي على نفسها صورة مثالية حالمة، لأنها تسعى لتقديم وجهة نظر معقولة عن تاريخ الفلسفة (كيفية تطور الأفكار الفلسفية).

لا ينظر سمارانداكه إلى تاريخ الفلسفة من زاوية السرد الكرونولوجي للمذاهب والنظريات الفلسفية، وإنما من خلال البحث في المنطق المتحكم في تطور الأفكار الفلسفية، حيث يرى أن المنطق النيوتروسوفي يسمح بتقديم دراسة عميقة لتاريخ الفلسفة من خلال التركيز على ثلاثة جوانب أساسية: الأول طبيعة الأفكار وتصنيفها، والثاني يخص مجرى تطور الأفكار، الثالث القوانين التي تحكم تطور الأفكار الفلسفية (الصيغ الفلسفية).

2) التصنيف النيوتروسوفي للأفكار الفلسفية

لقد أدت الدراسة التي قام بها ف. سمارانداكه لتاريخ الفلسفة إلى النظر لهذا التاريخ نظرة دقيقة، قادته لتقسيم الأفكار فلسفية في أي مرحلة تاريخية معينة إلى أربعة أقسام، يقول سمارانداكه واصفاً هذه الأقسام:

1) **المقبول بسهولة، منسي بسرعة.**
2) **المقبول بسهولة، منسي ببطء.**
3) **المقبول ببطء، منسي بسرعة.**
4) **المقبول ببطء، منسي ببطء.**

وفيما بين أي مقولتين هناك نسخ متنوعة. [6] "

لاحظ صلاح عثمان [6] أن هذا التقسيم الرباعي للأفكار في منطق النيوتروسوفيا يناظر التصنيف الأخلاقي لأنوع المحبة لدى ابن مسكويه (932م –1030م) فقد ذهب هذا الفيلسوف في كتابه: "*تهذيب الأخلاق وتطهير الأعراق*" [4] إلى وجود أربعة أنواع من الأفكار بخصوص المحبة: 1) ما ينعقد سريعا وينحل سريعا، 2) ما ينعقد سريعا وينحل بطيئا، 3) ما ينعقد بطيئا وينحل سريعا، 4) ما ينعقد بطيئا وينحل بطيئا. فالأولى سببها اللذة، والثانية سببها الخير، والثالثة سبب المنافع، والرابعة تتداخل فيها كل العناصر السابقة.

إذًا وعلى ما يبدو أن كل الفلسفات تتضمن هذه الأنواع من الأفكار، غير أن الفرق بين فلسفة قوية ونسقية وأخرى ضعيفة وغير متماسكة، هو قدرتها على احتواء كل أنواع الأفكار، وخصوصا النوع الأخير الذي يعبر بشكل واضح عن حقيقة العقلانية الفلسفية، التي تظهر ببطء وتنسى ببطء. ويمكن هنا أن نشير إلى مجموعة من النماذج (إن لم تكن كل الأفكار الفلسفية النسقية تشترك في هذه الخصائص) لنأخذ مثالاً بسيطًا يخص مفهوم العقلانية الفلسفية:

غالبا ما ترتبط العقلانية الفلسفية (الحديثة) باسم ديكارت والديكارتية، وقد كانت هذه الفلسفة في البداية مرفوضة من طرف السلطات الدينية والاجتماعية في القرن السابع عشر، باعتبارها مرادفًا للكفر والزندقة، وقد عانى ديكارت كثيرا من مجموعة من المضايقات اضطرته لمغادرة فرنسا باتجاه هولاندا المتسامحة دينيا لكي يتابع أبحاثه العلمية ويتابع تأسيسه لفلسفته العقلانية. غير أنه كان مضطرا لتقديم نوع من الولاء للكنيسة، وأن يعترف بأن فلسفته غير مناقضة للتوجه العام للكنيسة المسيحية[5] . ومع ذلك، ظل الموقف الرسمي للكنيسة ممتعضًا من هذه الفلسفة. لكن بعد وفاته، بدأت الفلسفة العقلانية تقبل ببطء شديد مع الفلاسفة الديكارتيين (بواسيه وفينلون ومالبرانش)، حيث ربط هؤلاء اللوغوس والعقل بالكلمة المسيحية [8]. ومع مرور الوقت ستتحول تلك الفكرة التي كانت

مرفوضة من طرف السلطات الرسمية إلى شعار مقدس للمجتمع الغربي؛ ولعل أصدق تعبير على ذلك، ما ذهب إليه روبيسبيير الذي اعتبر أن المبادئ العقلية هي وحدها من يستحق العبادة والتقديس والاحترام[7]. هكذا أصبحت فكرة العقلانية التي كانت مرفوضة في لحظة معينة، مقبولة بشكل بديهي وحدسي في فلسفتي القرنين الثامن عشر والتاسع عشر.

ويعبر المثال أعلاه عن موقف بخصوص تطور الأفكار الفلسفية وكيف أن تطور الأفكار يمر من مغاص، ولا يتم القبول بالأفكار الجديدة إلا بعد صراع مرير مع الأفكار القديمة. ولكن كيف تنبثق الأفكار الجديدة من ركام الأفكار القديمة؟ وما هي مراحل تطور الأفكار الفلسفية حسب النيوتروسوفيا والمنطق النيوتروسوفي؟ وما هي القوانين المتحكمة في تطور الأفكار الفلسفية؟

3) مجرى تطور الأفكار الفلسفية

يعترف سمارانداكه أن منهجه الفلسفي ومنطقه النيوتروسوفي مدين لمجموعة من الفلسفات السابقة عليه التي ركزت على مسألة تطور الأفكار الفلسفية والعلمية، خصوصاً الفلسفة الجدلية الهيغيلة، مع ذلك هناك فرق شاسع بين الجدلية والنيوتروسوفيا، حيث تتميز حيادية سمارانداكه عن جدلية هيغل بطغيان الجانب المنطقي والعلمي على الجانب الميتافيزيقي مما يجعل أفكارها أكثر واقعية. إضافة إلى ذلك، فإن أفكار هيغل تبسيطية واختزالية، إذ يعتبر المنهج الجدلي كمنهج قبلي مبسط، يحاول فرض تصورات ميتافيزيقية على الواقع، وما يشهد على ذلك أن الأمثلة التي كان يقدمها هيغل بخصوص الجدلية بسيطة جداً ولا تناسب التطور العلمي آنذاك. فبقدر ما كانت ميتافيزيقاه قوية وعظيمة، بقدر ما كانت معارفه العلمية محدودة جدًا، إذ كان متخلفًا عن علوم عصره بسنوات ضوئية. والدليل على هذا الكلام أن أبحاثه في علم الفلك كانت بدائية جدًا ولا تتوافق مع النظرية الفيزيائية الرسمية آنذاك (الفيزياء النيوتونية [3] . وعلى هذا الأساس وجد سمارانداكه أن توظيف المنطق النيوتروسوفي سينقل الأفكار الفلسفية من مستوى البساطة الجدلية إلى مستوى التعضي [6]

النيوتروسوفيNeutrosophic Organcism، وتقتضي هذه النزعة النظر للأفكار الفلسفية على أن لها حياة ودورة وجود تمر منها، وما يفعله المنطق النيوتروسوفي أنه يكشف عن هذه الحياة، ويخرجها من القوة إلى الفعل، ومن الكمون إلى الظهور. يمكننا تلخيص هذه الدورة في ثمان مراحل أساسية نوجزها فيما يلي:

1) **أطروحة محايدة: في هذه المرحلة تكون الفكرة في لحظة الحياد، تكون مبهمة غير واضحة، يصدق عليها الصدق والكذب في الوقت نفسه. ومن خلال هذه الأطروحة تبدأ الملامح الأساسية لظهور "قبل الأطروحة"[6].**
2) **قبل الأطروحة: وهي فكرة مستنبطة من صميم حياد الأطروحة < قبل أ > ومنها تخرج نسخ من قبل الأطروحة <قبل أ' > ومن الصراع بين < قبل أ > ونُسخها <قبل أ' > تنبثق الأطروحة <أ> [6].**
3) **الأطروحة: تولد الأطروحة بشكل فعلي من خلال الصراع مع ما قبلها، وبالتالي فإن تحديد الأطروحة هو تحديد لها وتحديد لنسخها وأطيافها الرديئة [6].**
4) **أمام الأطروحة: هو عبارة عن نُسخ الأطروحة وأطيافها الرديئة التي هي عبارة عن مجموعة من التأويلات المساء فهمها من طرف مدارس وأناس وثقافات مختلفة [6] ، فمثلاً التأويلات السكولائية قامت بتشويه أفكار أرسطو وجعلته في جبة المناصرين للأديان السماوية.**
5) **غير الأطروحة: مجموعة من الأفكار المشتقة والمنحرفة الناتجة عن التقاء بعض الأفكار المحايدة المختلفة والمغايرة عن الأطروحة بحيث إنه من الممكن أن تكون أي فكرة هي غير الأطروحة [6].**
6) **نقيض الأطروحة: المقابل المباشر لـ < أ > المنظور داخل نفي القضية ومن هذا النقيض تولد تأويلات ونسخ من الأفكار المؤولة بشكل سلبي وتتداخل < أ > و< أ'> و<نقيض أ> لتشكل "ما بعد القضية أو ما بعد الأطروحة" .**

7) **بعد الأطروحة [التركيب الحيادي للأفكار]: هي فكرة ناتجة عن اجتماع< نقيض أ > و<حيادأ> بنسب محددة يعطي قضية بعدية مستنتجة من صميمها تولد أطيافها معبرة عن فكرة جديدة [6].**

8) **أطروحة جديدة: أطروحة جديدة تنبثق مختلفة عن كل الأطاريح السابقة وبشروط جديدة مثل المنحنى غير المنتظم ذي النقط المنعطفة وبنمط متكرر لإعادة السيرورة النيوتروسوفية نفسها[6].**

يختلف هذا المسار التطوري النيوتروسوفي عن المسار الماركسي بتعقيده، لأن التطور في منطق النيوتروسوفيا عبارة عن منحنى تفاضلي أكثر تعقيداً، فالتطور ليس بالضرورة تقدما، لأنه في بعض الأحيان يحدث التقهقر والكمون بفعل البراديغم السياسي والفكري السائد الذي يؤثر على مسار تطور الأفكار. إن الاطروحة الجديدة كما تنظر إليها الفلسفة الحيادية تتضمن في جوفها أجزاء أخرى من الأطروحة القديمة وأجزاء من حياد الأطروحة ناجمة عن تأليفات سابقة، وأجزاء من نقيضها، إضافة إلى هذا الخليط والمزيج، فإن الأطروحة تمتزج بأطروحات أخرى؛ وهكذا تتطور الأفكار الفلسفية والعلمية على حد السواء.

ويمكن أن نوجز المراحل السابقة باختصار في أربع مراحل فقط[2]: 1) حياد الأطروحة 2) الأطروحة 3) نقيض الأطروحة 4) التركيب الحيادي، ومن ثمة تأسيس أطروحة جديدة، وهكذا تتطور الأفكار الفلسفية بشكل لولبي. من أجل ضبط هذا التطور وجد سمارانداكه أن مجرى تطور الأفكار غير كاف لاستيعاب كيفية تحول الأفكار الفلسفية، إذ يلزم وجود قوانين أو صيغ فلسفية تضبط تطور الأفكار الفلسفية.

4) القوانين الضابطة لتطور الأفكار الفلسفية [الصيغ الفلسفية]

[2] **تشكل هذه المراحل خطوات المنهج النيوتروسوفي: 1) حياد الأطروحة 2) الأطروحة 3) نقيض الأطروحة 4) التركيب الحيادي.**

ينطبق التقسيم السالف للأفكار على المذاهب الفلسفية والنظريات العلمية على حد السواء، ومن أجل ضبط هذا التطور يقترح المنطق النيوتروسوفي(النيوتروسوفيا) مجموعة من القوانين التي تحكم الأفكار، بهدف قياس حجم التناقض بين المفاهيم والأفكار والمذاهب الفلسفية. لكن كيف يمكن للخطاب الفلسفي الحر الذي يرفض الإكراهات والقوانين الصارمة أن يخضع لقوانين وصيغ رياضية نيوتروسوفية؟ كيف يمكن تكميم ما لا يقبل التكميم؟

يجيب فلورنتين سمارانداكه عن هذين السؤالين قائلا: "إن ما نقصده صيغاً فلسفية فقط، لأنه في المجال الروحي/ الفكري، من الصعب الحصول على صيغ مضبوطة. [6] " إن هذا اعتراف صريح بصعوبة وضع صيغ دقيقة، لكن هذا لا يمنع من وضع صيغ تقريبية للخطاب الفلسفي، من هذا المنطلق يقترح سمارانداكه مجموعة من القوانين التي تحكم الخطاب الفلسفي. على المستوى المنهجي، سنعرض لهذه القوانين، وسندعم كل قانون بأمثلة مناسبة من تاريخ الفلسفة.

4-1 قانون توازن الأفكار

ينص هذاالقانون على أنه كلما زادت < أ >، كلما قلت < نقيض أ > ويأخذ الشكل التالي:

$$< أ > \ \mathbf{O} \ < نقيض\ أ > = ث \ \mathbf{O} \ < حياد\ أ > = \text{ثابت نيوتروسوفي}[6]$$

حيث إن (ث) ثابت نيوتروسوفي يعتمد على < أ > و<حياد أ >، وهو نقطة دعم لوزن الطرفين، وإذا كانت هذه النقطة هي نقطة تلاقي الأفكار المحايدة تبسط إلى الصيغة التالية:

$$< أ > \ \mathbf{O} \ < نقيض\ أ > = ث.$$

وقدم سمارانداكه المثال الواقعي التالي للتدليل على هذا القانون:

التصنيع **O** النزوع إلى الروحانية= ثابت لأي مجتمع[1]

ويعني هذا القانون أنه كلما قل التصنيع إلا وصار المجتمع أكثر روحانية، وكلما ارتفعت وتيرة التصنيع إلا وقل المستوى الروحي والأخلاقي. وعلى هذا الأساس يمكن وضع الأزواج التالية:

العلم ʘ الدين= ثابت نيوتروسوفي

الأبيض ʘ الأسود = ثابت نيوتروسوفي

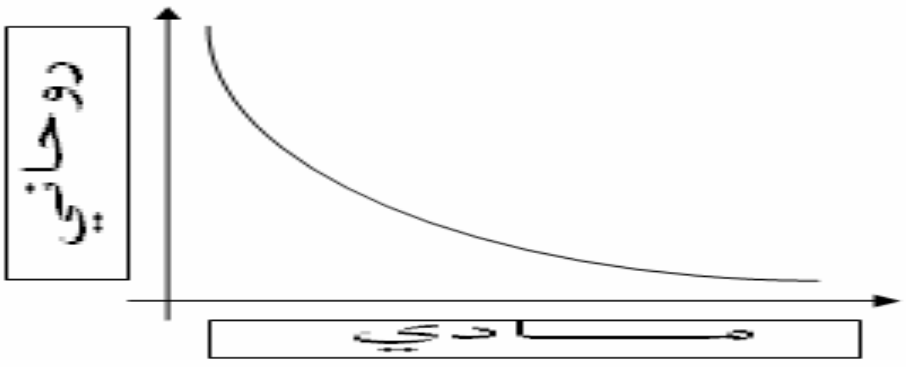
الوجود ʘ العدم = ثابت نيوتروسوفي

لنحاول الآن تطبيق قانون توازن الأفكار على المذاهب الفلسفية من أجل ترييض الفلسفة، لكن ليس بالطريقة الأفلاطونية [1] ، وإنما بالطريقة النيوتروسوفية المرنة. حيث وجد سمارانداكه من خلال دراسته لتاريخ الفلسفة أن العلاقة السابقة تنطبق على المذاهب الفلسفية المتناقضة فيما بينها مثل المادية والروحانية، العقلانية والتجريبية، الواقعية والمثالية... وينص القانون على ما يلي:

المادية ʘ الروحانية = ثابت بالنسبة لأي مجتمع. ويمكن تحويل العلاقة السابقة إلى الدالة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

ولتوضيح هذه العلاقة وضع سمارانداكه المخطط التالي [6]:



م ʘ ر= ث

تعني العلاقة: م Θ ر= ث، أنه كلما كانت مواقف الفيلسوف أكثر روحانية ومثالية وكان تعلقه بالعالم الروحي أكثر، كلما قل اهتمامه بالعالم المادي الواقعي وقلت غرائزه ونزواته. ويمكن توضيح ذلك من خلال الفلسفة الصوفية في العصور الوسطى التي تتعلق بشكل مبالغ به بالعالم الإلهي والروحي. فالفيلسوف المتصوف لا يهتم بالماديات، وإنما ينزع نحو الروحانيات، ويحاول الدنو من العالم الإلهي قدر الاستطاعة. ولا يسعد الصوفي إلا بقدر تخليه عن غرائزه المتجذرة في العالم، ولا يحقق تجليه وتوحده بالعالم الإلهي، إلا بقدر تخليه عن عالم الجسد، ونفيه لحيوانيته/لإنسانيته. حيث تتحدد درجة صوفيته بمدى زهده في عالم الوجود المادي، وبتخلصه من كل شيء يقربه من هذا العالم المادي، وبتماهيه مع الله. وهو ما يعني أن الفلسفة الصوفية تنطبق حرفيا على دالة سمارانداكه الخاصة بقانون توازن الأفكار الفلسفية.

وبالمقابل كلما كان الفيلسوف متعلقً ا بالعالم المادي ومرتبطًا به، كلما كان بعيدًا عن عالم الروح، فالحقيقة عند المادي لا تقوم إلا على مقولات المادة والارتباط بالعالم الحسي، ولا تتحقق السعادة عندهم إلا بتحقيق اللذة وتجنب الألم (الحرمان).

4–2 قانون نقيض الانعكاسية

ينص هذا القانون على أن أي قضية <أ> في مرآة ذاتها تمحو نفسها تدريجياً أو تتحول إلى فكرة مشوهة، مثال ذلك الزواج بين الأقارب يؤدي إلى مسوخ (نسل به إعاقات) [1] ، ولعل هذا ما يفسر لماذا يلجأ علماء البيولوجيا إلى تهجين النباتات والحيوانات للحصول على سلالة جيدة.

ويقدم سمارانداكه مثالاً آخرا على هذا القانون هو مثال النزعة الأدبية التي دمرت نفسها بنفسها، فالنزعة العدمية التي ذاعت بعد نشر رواية *" آباء وأبناء"* لتورجينيف Turgeniv سنة 1862 كنفي مطلق تنكر كل شيء حتى نفسها[1]. سنحاول من جهتنا تطبيق هذا القانون على تاريخ الفلسفة مبينين كيف أن تطبيقه يعد أمرا مهما في فهم الخطاب الفلسفي. لنأخذ على سبيل المثال المذهب العقلاني في

العصر الحديث (Rationalism) الذي يعود الفضل في تأسيسه في العصر الحديث إلى الديكارتية، فقد بدأت العقلانية مع رونييه ديكارت كفلسفة منفتحة تقبل تأويلات متعددة، غير أن المشكل وقع مباشرة بعد وفاته، إذ إن انغلاق تلاميذ ديكارت (فينلنون وبواسيه ومالبرانش) على أفكار أستاذهم وتشددهم لها أنتج نزعة عقلانية منغلقة على ذاتها. وبالتالي تحولت العقلانية إلى عقيدة ومذهب جامد أي كطيف مشوه من نفسه. تقول النيوتروسوفيا أنه لو أرادت هذه العقلانية أن تطور ذاتها وتحافظ على نفسها فيجب عليها الانفتاح على نقائضها، فعندما تنفتح، فإنها تفسح المجال لتطورها ونموها، ولعل هذا هو العمل الذي قام به كانط حينما أحيا العقلانية الفلسفية بعدما دخلت إلى غرفة الإنعاش مع دوغمائية فولف وبوغمارتن، فليست الفلسفة النقدية سوى محاولة فتح العقلانية الدوغمائية على نقائضها. وما قام به كانط كان تطبيقًا حرفيا لقانون نقيض الانعكاسية فما يمنحه طابع الحياة والإستمرارية للأفكار هو انفتاحها على نقائضها. وهنا يقترب سمارانداكه من كانط كثيرا.

كما يمكن أن نجد علاقة داخل هذا القانون بين فلسفة سمارانداكه وفلسفة التعقيد عند إدغار موران؛ حيث يشبه هذا الأخير الأنساق الفكرية بالأنساق الحية، حيث يحتوي كل نسق أو كل منظومة حية على طاقة تتغذى عليها وتحركها وحينما ينغلق أي نسق على نفسه يستهلك طاقته، يبدأ النسق في التآكل الذاتي وينتهي به الأمر إلى الموت. وبالتالي فإن الفكرة <أ> تموت إذا اكتفت بقدرتها الخاصة دون الانفتاح على وسطها [10] ونقائضها. بل الأكثر من ذلك يجب على الأفكار أن تتحاور وتتفاعل إذا ما أرادت إصلاح ذاتها[9].

إن مشكلة العقلانية التقليدية أنها انغلقت على نفسها، وكان المنطق الأرسطي هو الطاقة التي تحركها، وبعدما انتهت هذه الطاقة ووصلت إلى الانغلاق بدأت المفارقات والتناقضات تظهر في هذه العقلانية وما قامت به النيوتروسوفيا أنها فتحت هذه العقلانية على تناقضاتها ومفارقاتها من خلال مصدر طاقي جديد هو المنطق النيوتروسوفي متعدد القيم.

4–3 قانون تكميل المتناقضات

ينص القانون أن القضية <أ> تود التكامل مع <نفي أ> لكي تشكل كلاً واحدًا، والتكميل هنا لا يتعلق بذهاب الفكرة <أ> إلى نقيضها <نقيض أ> وإنما إلى كل فكرة غيرها أو مخالفة لها [6]. يبدو أن هذا المبدأ يشرع لنوع من الاختلاف الفلسفي. فإذا كان البياض يدل سيميولوجيا على الصفاء والمحبة والخير فإن اللون الأبيض ليس أبيضًا كما يقول علم البصريات، لأن اللون الأبيض مزيج بين عدد لا–متناه من الألوان المختلفة، هكذا لا تتحقق المحبة والخير إلا حينما تتضافر كل الألوان والاختلافات، كذلك الحقيقة الفلسفية لا تكون حقيقةً إلا إذا ساهم فيها عدد كبير من الفلاسفة والعلماء وكلما كانت وجهات النظر مختلفة ومتناقضة كلما كانت الحقيقة غنية. ويمكن أن نقدم مثالاً عن هذه الفلسفة التي تقوم على تكميل المتناقضات وهي الفلسفة الصينية القديمة. وتحديدا الفلسفة الطاوية، تتأسس الفلسفة الطاوية على مفهوم الطاو Tao الذي يعني الطريق أو المنهج الموصل للوجود الحقيقي، وقد يعني أصل كل شيء[2]. يتألف الطاو من نقيضين أساسيين هما الين (الأسود/ العدم/الشر) واليانغ (الأبيض/الوجود /الخير)، صحيح أنهما متناقضان من حيث الخصائص الجوهرية والعرضية، ولكن مع ذلك فهما متكاملان، فلا يتحدد الين إلا في حضور اليانغ ولا يتحقق اليانغ إلا بوجود الين. إنهما وجهان لحقيقة واحدة.

4–4 قانون الجاذبية الفكرية[1] النيوتروسوفية

يتألف هذا القانون من قانونين جزئيين: الأول قانون الجاذبية الخاصة ويتعلق بين الأفكار ونقائضها، والثاني قانون الجاذبية العامة ويتعلق بعلاقات التجاذب والارتباط بين الأفكار ونفيها.

ينص قانون الجاذبية الخاصة على أن كل فكرة تجذب وتنبذ فكرة أخرى بقوة تتناسب طردياً مع حاصل ضرب قياساتها النيوتروسوفية ودلالتها الجبرية، ويتشابه هذا القانون مع قانون نيوتن في جزئيات المادة، غير أن الفرق بينهما كما يقول فلورنتين سمارانداكه في أن الجاذبية النيوتروسوفية تخص الأفكار

وليس الأجسام، وأن التناسب بين عناصرهما يكون طرديا وليس عكسيا[6-1]. وبناء عليه تتجاذب الأفكار المتناقضة والمتعارضة بشكل حتمي نحو بعضها، فكلما كان التناقض شديدًا وقويا، كلما كانت شدة التجاذب أكبر وكانت الفرصة لبناء نسق فلسفي منسجم وقوي.

لاحقًا سيجد سمارانداكه أن الجاذبية الخاصة نظرية فكرية محدودة جدًا ويمكن اعتبارها نسخة رديئة من الفلسفة الهيغلية! ومن هذا المنطلق سيعمل على تعميم نظرية الجاذبية الخاصة لكي تطال حيادات الأفكار. فالتجاذب لا يكون بين القضايا ونقائضها، بل بين الأفكار ونفيها وحيادتها، لأن حياد الأفكار متضمن في نفيها [1] ، وينص القانون الأخير (الجاذبية الفكرية العامة) على ما يلي: إن القضية <أ> تنزع نحو <ليس أ> وهو ما يعني أيضاً نزوعاً نحو حياد القضية <حياد أ> لأن حياد القضية متضمن في نفي القضية.

هكذا نخلص في الأخير إلى أن القراءة النيوتروسوفية لتطور الأفكار الفلسفية تجعل من التناقضات خاصية أساسية بين المذاهب الفلسفية، بل إنها تجعل إحدى سماتها الكشف عن القوانين التي تحكم علاقات الأفكار والمذاهب الفلسفية.

خاتمة

لا ندعي من خلال هذا التطبيق أننا نمذجنا رياضيا الأفكار والمذاهب الفلسفية بشكل صارم، وإنما قمنا بمحاولة أولية لفهم القول الفلسفي من زاوية النيوتروسوفيا/المنطق النيوتروسوفي. نوجز محاولة الفهم هذه في نقطتين:

1) **تتعلق الأولى بنظرة المنطق النيوتروسوفي لطبيعة الفكر الفلسفي، التي تجعل من التناقضات والمفارقات الخاصية المميزة لتطور الفكر الفلسفي.**
2) **تتعلق الثانية بـ: طبيعة وتصنيف الأفكار الفلسفية والقوانين المتحكمة في تطور الأفكار الفلسفية.**

قائمة المصادر والمراجع:

[1]. Smarandache, Florentin [1999], A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic, Neutrosophy, Neurosophic Probability and Statistics, InfoLearnQuest and Learning (University of Microfilm International), sixth edition, USA 2007.

[2]. Smarandache, Florentin and Yuhua, FU [2010] , Neutrosophic Interpretation of Tao Te Ching, English- Chinese Bilingual, Kappa and Omega Chinese branch, Glendale, USA and Beijing, China, 2011.

[3]. Sorensen, Roy [2003], A Brief history of the Paradox, Philosophy and the Labyrinths of the Mind, Oxford University Pres، New –York.

[4]. ابن مسكويه، تهذيب الأخلاق وتطهير الأعراق، حققه وشرحه ابن الخطيب، القاهرة: المطبعة المصرية، بدون تاريخ.

[5]. ديكارت، روني ، تأملات في الفلسفة الأولى (تأملات ميتافيزيقية)، ترجمة وتقديم وتعليق، عثمان أمين، المركز القومي للترجمة، القاهرة، 2009.

[6]. سمارانداكه، فلورنتين وعثمان، صلاح [2007]، الفلسفة العربية من منظور نيوتروسوفي، منشأة المعارف،ط.1، الإسكندرية.

[7]. غرانجي، جيل غاستون [1955]، العقل، تعريب محمود بن جماعة، دار محمد علي للنشر، ط.1، صفاقس، 2004.

[8]. لالا،ند أندري: [1948]، العقل والمعايير، ترجمة، نظمي لوقا، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، 1979.

[9]. موران، إدغار [1986]، المنهج :معرفة المعرفة، ترجمة: د. يوسف تيبس، دار إفريقيا الشرق، الدار البيضاء، 2013.

[10]. موران، إدغار: [1991]، الفكر والمستقبل: مدخل للفكر المركب، ترجمة أحمد القصوار ومنير الحجوجي، دار توبقال للطباعة والنشر، الطبعة الأولى، الدار البيضاء، 2004.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 04, 2024

University of New Mexico

On Neutrosophic Topological Spaces in Šostak's Sense

Soheyb Milles, Hadjer Berri and Amira Abidat
Department of Mathematics, Institute of Science, University Center of Barika, Algeria.
*Correspondence: soheyb.milles@cu-barika.dz

Received: April 2024; *Accepted*: May 2024

Abstract. Alexander P. Šostak has proposed a fundamental approach to the notion of fuzzy topological space, which depends on the generalization of classical (crisp) topology and Chang's fuzzy topology. Unlike previous approaches, not only the subsets were fuzzified, but also the conditions between them. In this paper, we present the notion of neutrosophic topological space in Šostak's sense by a simple way. Moreover, we investigate interesting properties of this topological space which is considered as a generalization of fuzzy and intuitionistic fuzzy topological spaces.

Keywords: Fuzzy sets; Atanassov's intuitionistic fuzzy sets; neutrosophic sets; topology;

1. Introduction

F. Smarandache [17] generalized the notions of fuzzy sets and Atanassov's intuitionistic fuzzy sets to the notion of neutrosophic sets (NSs). He introduced this notion to deal with imprecise and indeterminate data. NSs are defined by truth membership function (T), indeterminacy membership function (I) and falsity membership function (F). Many authors have studied and applied the notion of neutrosophic sets in several areas such as decision making problems (e.g. [21]), image processing (e.g. [25]), educational problem (e.g. [11]), conflict resolution (e.g. [15]), social problems (e.g. [10]), medical diagnosis (e.g. [22]), supply chain management (e.g. [1]). In particular, to exercise neutrosophic sets in real life applications suitably, Wang et al. [23] defined the notion of single valued neutrosophic sets (SVNSs) as a subclass of a neutrosophic sets, and investigated some of its properties. The studies, whether theoretical or

applied on single valued neutrosophic set have been progressing rapidly. For instance, [2,6,8] and more others.

We study in this paper the notion of neutrosophic topological space in Šostak's sense as an important generalized fuzzy topological space. Also, several interesting properties on this structure are discussed.

The contents of the paper are organized as follows. In Section 2, we recall the necessary basic concepts and properties of neutrosophic sets, and some related notions that will be needed throughout this paper. In Section 3, we present the notion of neutrosophic topological space in Šostak's sense by a simple method. In Section 4, we study interesting properties of this topological space which is considered as a generalization of fuzzy and intuitionistic fuzzy topological spaces. Finally, we present some conclusions and discuss future research in Section 5.

2. **Preliminaries**

This section contains the basic definitions and properties of neutrosophic sets and some related notions that will be needed throughout this paper. The notion of fuzzy sets was first introduced by Zadeh [24].

Definition 2.1. [24] Let X be a nonempty set. A fuzzy set $A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ is characterized by a membership function $\mu_A : X \to [0,1]$, where $\mu_A(x)$ is interpreted as the degree of membership of the element x in the fuzzy subset A for any $x \in X$.

In 1983, Atanassov [3] proposed a generalization of Zadeh membership degree and introduced the notion of the intuitionistic fuzzy set.

Definition 2.2. [3] Let X be a nonempty set. An intuitionistic fuzzy set (IFS, for short) A on X is an object of the form $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ characterized by a membership function $\mu_A : X \to [0,1]$ and a non-membership function $\nu_A : X \to [0,1]$ which satisfy the condition:

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \text{ for any } x \in X.$$

In 1998, Smarandache [17] defined the concept of a neutrosophic set as a generalization of Atanassov's intuitionistic fuzzy set. Also, he introduced neutrosophic logic, neutrosophic set and its applications in [18,19]. In particular, Wang et al. [23] introduced the notion of a single valued neutrosophic set.

Definition 2.3. [18] Let X be a nonempty set. A neutrosophic set (NS, for short) A on X is an object of the form $A = \{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ characterized by a membership

function $\mu_A : X \to]^-0, 1^+[$ and an indeterminacy function $\sigma_A : X \to]^-0, 1^+[$ and a non-membership function $\nu_A : X \to]^-0, 1^+[$ which satisfy the condition:

$$^-0 \leq \mu_A(x) + \sigma_A(x) + \nu_A(x) \leq 3^+, \text{ for any } x \in X.$$

Certainly, intuitionistic fuzzy sets are neutrosophic sets by setting $\sigma_A(x) = 1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$.

Next, we show the notion of single valued neutrosophic set as an instance of neutrosophic set which can be used in real scientific and engineering applications.

Definition 2.4. [23] Let X be a nonempty set. A single valued neutrosophic set (SVNS, for short) A on X is an object of the form $A = \{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ characterized by a truth-membership function $\mu_A : X \to [0, 1]$, an indeterminacy-membership function $\sigma_A : X \to [0, 1]$ and a falsity-membership function $\nu_A : X \to [0, 1]$.

The class of single valued neutrosophic sets on X is denoted by $SVN(X)$.

For any two NSs A and B on a set X, several operations are defined (see, e.g., [20, 23]). Here we will present only those which are related to the present paper.

(i) $A \subseteq B$ if $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ and $\sigma_A(x) \leq \sigma_B(x)$ and $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$, for all $x \in X$,
(ii) $A = B$ if $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ and $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ and $\nu_A(x) = \nu_B(x)$, for all $x \in X$,
(iii) $A \cap B = \{\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x)\rangle \mid x \in X\}$,
(iv) $A \cup B = \{\langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \sigma_A(x) \vee \sigma_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x)\rangle \mid x \in X\}$,
(v) $\overline{A} = \{\langle x, 1 - \nu_A(x), 1 - \sigma_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$,
(vi) $[A] = \{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$,
(vii) $\langle A\rangle = \{\langle x, 1 - \nu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$.

In the sequel, we need the following definition of level sets (which is also often called (α, β, γ)-cuts) of neutrosophic sets.

Definition 2.5. [2] Let A be a neutrosophic set on a set X. The (α, β, γ)-cut of A is a crisp subset

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha \text{ and } \sigma_A(x) \geq \beta \text{ and } \nu_A(x) \leq \gamma\},$$

where $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 1]$.

Definition 2.6. [2] Let A be a neutrosophic set on a set X. The support of A is the crisp subset on X given by

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \neq 0 \text{ and } \sigma_A(x) \neq 0 \text{ and } \nu_A(x) \neq 0\}.$$

3. Neutrosophic topological spaces

In this section, we provide the basic definitions of neutrosophic topological space and several properties of neutrosophic topological spaces in Šostak's sense.

3.1. *Definitions*

Definition 3.1. [16] Let X be non empty set and τ is a family of neutrosophic subsets in X satisfying the following axioms:

(i) $\emptyset, X \in \tau$, with $\emptyset = (0.0.1)$ and $X = (1.1.0)$.

(ii) For every $A, B \in \tau$, then $A \sqcap B \in \tau$.

(iii) For any $\{A_i, i \in I\} \sqsubseteq \tau$, then $\sqcup A_i \in \tau$.

In this case, the pair (X, τ) is called a neutrosophic topological space in Chang's sense, and any neutrosophic set in τ is known as neutrosophic open set in X.

Remark 3.2. To avoid any confusion or misunderstanding of some equation, we will use the symbols $(\sqsubset, \sqcup, \sqcup)$ to refer to the order, max, and min of neutrosophic sets and $(\leq, \wedge, \vee)$ to refer to the usual order, max, and min on the unit interval $[0, 1]$.

Now, we present the notion of neutrosophic topological space in Šostak's sense by a simple way.

Definition 3.3. Let X be non empty set and τ is a family of neutrosophic subsets in X satisfying the following axioms:

(i) $\mu_\tau(\emptyset) = \sigma_\tau(\emptyset) = 1$ and $\nu_\tau(\emptyset) = 0$,
$\mu_\tau(X) = \sigma_\tau(X) = 1$ and $\nu_\tau(X) = 0$.

(ii) For every $A_1, A_2 \in I^X$,
$\mu_\tau(A_1 \sqcap A_2) \geq \mu_\tau(A_1) \wedge \mu_\tau(A_2)$,
$\sigma_\tau(A_1 \sqcap A_2) \geq \sigma_\tau(A_1) \wedge \sigma_\tau(A_2)$ and
$\nu_\tau(A_1 \sqcap A_2) \leq \nu_\tau(A_1) \vee \nu_\tau(A_2)$.

(iii) For any $A_i \in I^X, i \in I$,
$\mu_\tau(\sqcup_{i\in I} A_i) \geq \wedge_{i\in I} \mu_\tau(A_i)$,
$\sigma_\tau(\sqcup_{i\in I} A_i) \geq \wedge_{i\in I} \sigma_\tau(A_i)$ and
$\nu_\tau(\sqcup_{i\in I} A_i) \leq \vee_{i\in I} \nu_\tau(A_i)$.

In this case the pair (X, τ) is called a neutrosophic topological space in Šostak's sense and any set in τ is known as neuterosophic open set in X. The functions μ_τ, σ_τ and ν_τ represent the degree of openness, the degree of neutral-openness, and the degree of non-openness, respectively.

Definition 3.4. Let X be non empty set and $\mathfrak{I}$ is a family of neutrosophic subsets in X satisfying the following axioms:

(i) $\mu_\mathfrak{I}(\emptyset) = \sigma_\mathfrak{I}(\emptyset) = 1$ and $\nu_\mathfrak{I}(\emptyset) = 0$,
$\mu_\mathfrak{I}(X) = \sigma_\mathfrak{I}(X) = 1$ and $\nu_\mathfrak{I}(X) = 0$.

(ii) For every $A_1, A_2 \in I^X$,
$\mu_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \geq \mu_{\mathfrak{I}}(A_1) \wedge \mu_{\mathfrak{I}}(A_2)$,
$\sigma_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \geq \sigma_{\mathfrak{I}}(A_1) \wedge \sigma_{\mathfrak{I}}(A_2)$ and
$\nu_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \leq \nu_{\mathfrak{I}}(A_1) \vee \nu_{\mathfrak{I}}(A_2)$.

(iii) For any $A_i \in I^X, i \in I$,
$\mu_{\mathfrak{I}}(\sqcap_{i\in I} A_i) \geq \wedge_{i\in I}\mu_{\mathfrak{I}}(A_i)$,
$\sigma_{\mathfrak{I}}(\sqcap_{i\in I} A_i) \geq \wedge_{i\in I}\sigma_{\mathfrak{I}}(A_i)$ and
$\nu_{\mathfrak{I}}(\sqcap_{i\in I} A_i) \leq \vee_{i\in I}\nu_{\mathfrak{I}}(A_i)$.

The pair $(X, \mathfrak{I})$ is called the closed set. The elements of $\mathfrak{I}$ are called closer neutrosophic sets.

4. Properties of neutrosophic topological spaces in Šostak's sense

In this section, we study interesting properties of neutrosophic topological spaces in Šostak's sense which is considered as a generalization of fuzzy and intuitionistic fuzzy topological spaces.

Proposition 4.1. *Let (X, τ) be a neutrosophic topological space in Šostak sense, and A be a neutrosophic subset on X. If the following statement hold:*

(i) $\mu_{\mathfrak{I}}(A) = \mu_{\tau}(A^c)$,
(ii) $\sigma_{\mathfrak{I}}(A) = \sigma_{\tau}(A^c)$,
(iii) $\nu_{\mathfrak{I}}(A) = \nu_{\tau}(A^c)$.

Then $\mathfrak{I}$ is a gradation of closeness.

Proof. (i) We show that $[\mu_{\mathfrak{I}}(\emptyset) = \sigma_{\mathfrak{I}}(\emptyset) = 1$ and $\nu_{\mathfrak{I}}(\emptyset) = 0]$ and $[\mu_{\mathfrak{I}}(X) = \sigma_{\mathfrak{I}}(X) = 1$ and $\nu_{\mathfrak{I}}(X) = 0]$. From $(i), (ii)$ and (iii) of Definition 3.3 we get that,
$\mu_{\mathfrak{I}}(\emptyset) = \mu_{\tau}(\emptyset^c) = \mu_{\tau}(X) = 1$,
$\sigma_{\mathfrak{I}}(\emptyset) = \sigma_{\tau}(\emptyset^c) = \sigma_{\tau}(X) = 1$ and
$\nu_{\mathfrak{I}}(\emptyset) = \nu_{\tau}(\emptyset^c) = \nu_{\tau}(X) = 0$.
By using the same methode, we obtain $[\mu_{\mathfrak{I}}(X) = \sigma_{\mathfrak{I}}(X) = 1$ and $\nu_{\mathfrak{I}}(X) = 0]$.

(ii) We show that $\mu_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \geq \mu_{\mathfrak{I}}(A_1) \wedge \mu_{\mathfrak{I}}(A_2)$, $\sigma_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \geq \sigma_{\mathfrak{I}}(A_1) \wedge \sigma_{\mathfrak{I}}(A_2)$ and $\nu_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \leq \nu_{\mathfrak{I}}(A_1) \vee \nu_{\mathfrak{I}}(A_2)$. By $(i), (ii)$ and (iii) of Definition 3.3 we get that, $\mu_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) = \mu_{\tau}((A_1 \sqcup A_2)^c) = \mu_{\tau}(A_1^c \sqcap A_2^c)$. Also, by using the same Definition 3.3, we conclude that $\mu_{\tau}(A_1^c \sqcap A_2^c) \geq \mu_{\tau}(A_1^c) \wedge \mu_{\tau}(A_2^c) = \mu_{\mathfrak{I}}(A_1) \wedge \mu_{\mathfrak{I}}(A_2)$. Thus $\mu_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \geq \mu_{\mathfrak{I}}(A_1) \wedge \mu_{\mathfrak{I}}(A_2)$. In the same manner, we can show that $\sigma_{\mathfrak{I}}(A_1 \vee A_2) \geq \sigma_{\mathfrak{I}}(A_1) \sqcup \sigma_{\mathfrak{I}}(A_2)$ and $\nu_{\mathfrak{I}}(A_1 \sqcup A_2) \leq \nu_{\mathfrak{I}}(A_1) \vee \nu_{\mathfrak{I}}(A_2)$.

(iii) We show that $\mu_{\mathfrak{I}}(\sqcap_{i\in I} A_i) \geq \wedge_{i\in I}\mu_{\mathfrak{I}}(A_i)$, $\sigma_{\mathfrak{I}}(\sqcap_{i\in I} A_i) \geq \wedge_{i\in I}\sigma_{\mathfrak{I}}(A_i)$ and $\nu_{\mathfrak{I}}(\sqcap_{i\in I} A_i) \leq \vee_{i\in I}\nu_{\mathfrak{I}}(A_i)$. From $(i), (ii)$ and (iii) of Definition 3.3,we get that, $\mu_{\mathfrak{I}}(\sqcap_{i\in I} A_i) = \mu_{\tau}(\sqcap_{i\in I} A_i)^c = \mu_{\tau}(\sqcup_{i\in I}(A_i)^c)$. Also, by using the same Definition 3.3, we conclude

that $\mu_\tau(\sqcup_{i\in I}(A_i)^c) \geq \wedge_{i\in I}\mu_\tau(A_i^c) = \wedge_{i\in I}\mu_\mathfrak{I}(A_i)$. Hence $\mu_\mathfrak{I}(\sqcap_{i\in I}A_i) \geq \wedge_{i\in I}\mu_\mathfrak{I}(A_i)$. In the same manner, we can show that $\sigma_\mathfrak{I}(\sqcap_{i\in I}A_i) \geq \wedge_{i\in I}\sigma_\mathfrak{I}(A_i)$ and $\nu_\mathfrak{I}(\sqcap_{i\in I}A_i) \leq \vee_{i\in I}\nu_\mathfrak{I}(A_i)$.

Therefore, $\mathfrak{I}$ satisfies the conditions of the gradation of closeness on X. □

Proposition 4.2. *Let $(X,\tau_i)_{i\in I}$ be a family of a neutrosophic topological spaces in Šostak's sense on X. Then their intersection $\curlywedge_{i\in I}(X,\tau_i)$ is a neutrosophic topological space in Šostak's sense on X.*

Proof. We put $\tau = \curlywedge_{k\in I}\tau_k$, and we will show that (X,τ) is a neutrosophic topological space in Šostak's sense on X.

(i) On the one hand $\mu_\tau(\emptyset) = \mu_{\curlywedge_{k\in I}\tau_k}(\emptyset) = \wedge_{k\in I}\mu_{\tau_k}(\emptyset) = \wedge_{k\in I}1 = 1$. In the same manner, we get that $\sigma_\tau(\emptyset) = 1$ and $\nu_\tau(\emptyset) = 0$. On the other hand $\mu_\tau(X) = \mu_{\curlywedge_{k\in I}\tau_k}(X) = \wedge_{k\in I}\mu_{\tau_k}(X) = \wedge_{k\in I}1 = 1$. By the same method, we get that $\sigma_\tau(X) = 1$ and $\nu_\tau(X) = 0$. Hence, $\mu_\tau(\emptyset) = \sigma_\tau(\emptyset) = 1$ and $\nu_\tau(\emptyset) = 0$, $\mu_\tau(X) = \sigma_\tau(X) = 1$ and $\nu_\tau(X) = 0$.

(ii) We show that $\mu_\tau(A_1 \sqcap A_2) \geq \mu_\tau(A_1) \wedge \mu_\tau(A_2), \sigma_\tau(A_1 \sqcap A_2) \geq \sigma_\tau(A_1) \wedge \sigma_\tau(A_2)$ and $\nu_\tau(A_1 \sqcap A_2) \leq \nu_\tau(A_1) \vee \nu_\tau(A_2)$, for every $A_1, A_2 \in I^X$.
$\mu_\tau(A_1 \sqcap A_2) = \mu_{\curlywedge_{k\in I}\tau_k}(A_1 \sqcap A_2) = \wedge_{k\in I}\mu_{\tau_k}(A_1 \sqcap A_2) \geq \wedge_{k\in I}(\mu_{\tau_k}(A_1) \wedge \mu_{\tau_k}(A_2) = (\wedge_{k\in I}\mu_{\tau_k}(A_1)) \wedge (\wedge_{k\in I}\mu_{\tau_k}(A_2)) = \mu_\tau(A_1) \wedge \mu_\tau(A_2)$, it follows that $\mu_\tau(A_1 \sqcap A_2) \geq \mu_\tau(A_1) \wedge \mu_\tau(A_2)$. In the same manner, we can show that $\sigma_\tau(A_1 \sqcap A_2) \geq \sigma_\tau(A_1) \wedge \sigma_\tau(A_2)$ and $\nu_\tau(A_1 \sqcap A_2) \leq \nu_\tau(A_1) \vee \nu_\tau(A_2)$.

(iii) We show that $\mu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) \geq \wedge_{i\in I}\mu_\tau(A_i), \sigma_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) \geq \wedge_{i\in I}\sigma_\tau(A_i)$ and $\nu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) \leq \vee_{i\in I}\nu_\tau(A_i)$. For any $A_i \in I^X$
$\mu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) = \mu_{\curlywedge_{k\in I}\tau_k}(A_i) = \wedge_{k\in I}\mu_{\tau_k}(\sqcup_{i\in I}A_I) \geq \wedge_{k\in I}(\wedge_{i\in I}\mu_{\tau_k}(A_i))$. Since τ_k are a neutrosophic topologies in Šostak's sense, then it holds that $\wedge_{k\in I}(\wedge_{i\in I}\mu_{\tau_k}(A_i)) \geq \wedge_{i\in I}(\wedge_{k\in I}\mu_{\tau_k}(A_i)) = \wedge_{i\in I}\mu_\tau(A_i)$, it follows that $\mu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) = \wedge_{i\in I}\mu_\tau(A_i)$, $\sigma_\tau(\sqcup_{i\in I}A_I) = \sigma_{\curlywedge_{k\in I}\tau_k}(\sqcap A_i) = \wedge_{k\in I}\sigma_{\tau_k}(\sqcup_{i\in I}A_I) \geq \wedge_{k\in I}(\wedge_{i\in I}\sigma_{\tau_k}(A_i)) \geq \wedge_{i\in I}(\wedge_{k\in I}\sigma_{\tau_k}(A_i)) = \wedge_{k\in I}\sigma_\tau(A_i)$, then it follows that $\sigma_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) = \wedge_{i\in I}\sigma_\tau(A_i)$ and $\nu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_I) = \nu_{\curlywedge_{k\in I}\tau_k}(\sqcap A_i) = \wedge_{k\in I}\nu_{\tau_k}(\sqcup_{i\in I}A_I) \leq \wedge_{k\in I}(\wedge_{i\in I}\nu_{\tau_k}(A_i)) \leq \wedge_{i\in I}(\wedge_{k\in I}\nu_{\tau_k}(A_i)) = \wedge_{k\in I}\nu_\tau(A_i)$, then $\nu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) \leq \vee_{i\in I}\nu_\tau(A_i)$. Hence $\mu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) \geq \wedge_{i\in I}\mu_\tau(A_i)$, $\sigma_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) \geq \wedge_{i\in I}\sigma_\tau(A_i)$ and $\nu_\tau(\sqcup_{i\in I}A_i) \leq \vee_{i\in I}\nu_\tau(A_i)$.

Thus τ is a neutrosophic topological space in Šostak's sense. □

Next, we provide a characterization in neutrosophic topological space in Šostak's sense. First, we need the following notions.

Definition 4.3. Let $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ be a mapping between two topologies. Then f is called :

(1) open if $\mu_\tau(A) \leq \mu_\tau(f(A)), \sigma_\tau(A) \leq \sigma_{\tau,}(f(A))$ and $\nu_\tau(A) \geq \nu_{\tau,}(f(A))$,
(2) closed if $\mu_\mathfrak{I}(A) \leq \mu_{\mathfrak{I}'}(f(A)), \sigma_\mathfrak{I}(A) \leq \sigma_{\mathfrak{I}'}(f(A))$ and $\nu_\mathfrak{I}(A) \geq \nu_{\mathfrak{I}'}(f(A))$.

Definition 4.4. Let (X, τ) and (Y, τ') are two neutrosophic topologies and $f : X \to Y$ is a mapping and is called a neutrosophic continuous if $\mu_\tau(f^{-1}(B)) \geq \mu_{\tau'}(B), \sigma_\tau(f^{-1}(B)) \geq \sigma_{\tau'}(B)$ and $\nu_\tau(f^{-1}(B)) \leq \nu_{\tau'}(B)$, for every $B \in I^Y$, where $f^{-1}[B]$ is defined by $f^{-1}[B](x) = B(f(x)), \forall x \in X$.

Theorem 4.5. *Let (X, τ) and (X, τ') be two neutrosophic topological spaces in Šostak's sense and $f : X \longrightarrow Y$ be a bijective mapping. The following statement are equivalent*

(i) *f^{-1} is a neutrosophic continuous,*
(ii) *f is a neutrosophic open,*
(iii) *f is a neutrosophic closed.*

Proof. $(i) \Longrightarrow (ii)$
Suppose that f^{-1} is a neutrosophic continuous, we need to prove that f is neutrosophic open. Since f^{-1} is a continuous mapping, then it holds that $\mu_{\tau'}(f(B)) \geq \mu_\tau(B), \sigma_{\tau'}(f(B)) \geq \sigma_\tau(B)$ and $\nu_{\tau'}(f(B)) \leq \nu_\tau(B)$ for any $B \in I^X$. We get directly that f is a neutrosophic open.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$
Suppose that f is a neutrosophic open i.e., $\tau(A) \leq \tau'(f(A))$, and we need to prove that f is a neutrosophic closed i.e., $\mathfrak{I}(A) \leq \mathfrak{I}'(f(A))$. We have that $\mathfrak{I}(A) = \tau(A^c)$. and $\mu_\mathfrak{I}(A) = \tau(A^c) \leq \tau'(f(A^c))$, because that f is a neutrosophic open $\mu_{\tau'}(f(A^c)) = \mu_{\tau'}[(f(A))^c] = \mu_{\mathfrak{I}'}(f(A))$, then it follows that $\mu_{\mathfrak{I}(A)} \leq \mu_{\mathfrak{I}'}(f(A))$. By using the same method, we can obtain that $\sigma_{\mathfrak{I}(A)} \leq \sigma_{\mathfrak{I}'}(f(A))$. Also, $\nu_\mathfrak{I}(A) = \tau(A^c) \geq \tau' f(A^c)$, since f is neutrosophic open $\nu_{\tau'} f(A^c) = \nu_{\tau'}[(f(A))^c] = \nu_{\mathfrak{I}'}(f(A))$, then it follows that $\nu_{\mathfrak{I}(A)} \geq \nu_{\mathfrak{I}'}(f(A))$. Hence, f is a neutrosophic closed.
$(iii) \Longrightarrow (i)$
Suppose that f is a neutrosophic closed i.e., $\mathfrak{I}(A) \leq \mathfrak{I}'(f(A))$, and we need to prove that f^{-1} is a neutrosophic continuous i.e., $\tau(A) \leq \tau'(f(A))$ for any $A \in I^X$, $\mu_\tau(A) = \mu_\mathfrak{I}(A^c) \leq \mu_{\mathfrak{I}'}(f(A^c))$, because that f is a neutrosophic closed $\mu_\mathfrak{I}(f(A^c)) = \mu_{\mathfrak{I}'}[(f(A))^c] = \mu_{\tau'} f(A)$, then it holds that $\mu_\tau(A) \leq \mu_{\tau'} f(A)$. By using the same method, we can obtain that $\sigma_\tau(A) \leq \mu_{\tau'} f(A)$. Also, $\nu_\tau(A) = \mu_\mathfrak{I}(A^c) \geq \nu_{\mathfrak{I}'}(f(A^c))$, from f is a neutrosophic closed $\nu_{\mathfrak{I}'}(f(A^c)) = \nu_{\mathfrak{I}'}[(f(A))^c] = \nu_{\tau'} f(A)$. Hence, $\nu_\tau(A) \geq \nu_{\tau'} f(A)$. Thus, f^{-1} is a neutrosophic continuous. □

5. Conclusion

In this work, we have studied the notion of neutrosophic topological spaces in Šostak's sense which is considered as a generalization of fuzzy and intuitionistic fuzzy topological spaces. Future work will be directed to study topological properties in this case such as completeness, compactness and other topological properties.

References

1. Abdel-Basset, M.; Mohamed, R. A novel plithogenic TOPSIS-CRITIC model for sustainable supply chain risk management. Journal of Cleaner Production, 2020, 247, 119586.
2. Akram, M., Shahzadi, S. and Saeid, A.B., (2018), Single valued neutrosophic hypergraphs, TWMS J. App. Eng. Math, 8(1), pp. 122-135.
3. Atanassov, K. Intuitionistic fuzzy sets. VII ITKRs Scientific Session, Sofia, 1983.
4. Atanassov, K. Intuitionistic fuzzy sets. New York: Springer-Verlag. Heidelberg, 1999.
5. Agarwal, R.P.; Milles, S.; Ziane, B.; Mennouni, A.; Zedam, L. Ideals and Filters on Neutrosophic Topologies Generated by Neutrosophic Relations, Axioms, 2024, 13(292), 1–20.
6. Broumi, S.; Smarandache, F. Several Similarity Measures of Neutrosophic Sets. Neutrosophic Sets and Systems, 2013, 1, 54-62.
7. El-Gayyar, M. Smooth Neutrosophic Topological Spaces. Neutrosophic Sets Syst. 2016, 65, 65–72.
8. Karaaslan, F.; Hayat, K. Some new operations on single-valued neutrosophic matrices and their applications in multi-criteria group decision making. Applied Intelligence, 2018, 48.
9. Latreche, A.; Barkat, O.; Milles, S.; Ismail, F. Single valued neutrosophic mappings defined by single valued neutrosophic relations with applications. Neutrosophic Sets Syst, 2020, 32, 203–220.
10. Mondal, K.; Pramanik, S. A study on problems of Hijras in West Bengal based on neutrosophic cognitive maps. Neutrosophic Sets and Systems, 2014, 5,pp. 21-26.
11. Mondal, K.; Pramanik, S. Neutrosophic decision making model of school choice. Neutrosophic Sets and Systems, 2015, 7, 62–68.
12. Milles, S.; Latreche, A.; Barkat, O. Completeness and Compactness in Standard Single Valued Neutrosophic Metric Spaces. Int. J. Neutrosophic Sci, 2020, 12, 96–104.
13. Milles, S.; Hammami, N. Neutrosophic topologies generated by neutrosophic relations. Alger. J. Eng. Archit. Urban, 2021, 5, 417–426.
14. Milles, S. The Lattice of intuitionistic fuzzy topologies generated by intuitionistic fuzzy relations. Appl. Appl. Math, 2020, 15, 942–956.
15. Pramanik, S.; Roy, T.K. Neutrosophic game theoretic approach to Indo-Pak conflict over Jammu-Kashmir. Neutrosophic Sets and Systems, 2014, 2, 82–101.
16. Salama, A.A.; Salwa, S.A. Neutrosophic set and Neutrosophic topological spaces ,J. Mathematics, 2278-5728,2012,pp. 31-35.
17. Smarandache, F. In: Neutrosophy. Neutrisophic Property, Sets, and Logic. American Research Press. Rehoboth. USA, 1998.
18. Smarandache, F. In: A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics. InfoLearnQuest. USA, 2007.
19. Smarandache, F. n-valued refined neutrosophic logic and its applications to Physics. Progress in Physics, 2013, 8, 143–146.
20. Yang, H.L.; Guo, Z.L.; Liao, X. On single valued neutrosophic relations. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2016, 30(2), 1045–1056.

21. Ye, J. Single valued neutrosophic cross entropy for multicriteria decision making problems. Applied Mathematical Modeling, 2014, 38, 1170–1175.
22. Ye, S.; Ye, J. Dice similarity measure between single valued neutrosophic multisets and its application in medical diagnosis. Neutrosophic Sets and Systems, 2014, 6, 49–54.
23. Wang, H.; Smarandache, F.; Zhang, Y.Q.; Sunderraman, R. Single valued neutrosophic sets. Multispace Multistruct, 2010, 4, 410–413.
24. Zadeh, L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8, 331–352.
25. Zhang, M.; Zhang, L.; Cheng, H.D. A neutrosophic approach to image segmentation based on watershed method. Signal Processing, 2010, 90(5), 1510–1517.
26. Zedam, L.; Milles, S.; Bennoui, A. Ideals and filters on a lattice in neutrosophic setting. Appl. Appl. Math, 2021, 16, 1140–1154.

Neutrosophic Knowledge, Vol. 04, 2024
University of New Mexico

Article

Neutrosophie : un cadre interdisciplinaire pour une meilleure compréhension de l'incertitude et de l'indétermination

Florentin Smarandache [1]

[1] Emeritus Professor, PhD, PostDocs
University of New Mexico; Mathematics, Physics, and Natural Science Division
705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, USA
* Correspondence: smarand@unm.edu

Received: 06 08, 2024; *Accepted:* 06 10, 2024.

Abstract: La neutrosophie, un cadre philosophique et scientifique relativement récent introduit dans les années 1990,[1] propose une approche robuste pour comprendre et modéliser l'indétermination, la contradiction et l'incertitude. Explorons les concepts fondamentaux de la neutrosophie et quelques diverses applications à travers plusieurs disciplines, notamment les mathématiques, la physique, la sociologie, la psychologie et la biologie.

Keywords: incertitude ; neutrosophie ; neutrosophication ; triade neutrosophique ; ensemble neutrosophique ; logique neutrosophique ; statistiques neutrosophiques ; physique neutrosophique ; personnalité neutrosophique ; neutrosociologie ; génétique neutrosophique ; théorie neutrosophique de l'évolution, de l'involution et de l'indétermination.

1. Concepts fondamentaux de la neutrosophies

Les énormes données auxquelles nous sommes confrontés dans la vie réelle sont remplies d'indétermination : elles sont vagues, incomplètes, contradictoires, hybrides, biaisées, ignorantes, redondantes, superflues, dénuées de sens, ambiguës, floues, etc. C'est pourquoi les sciences neutrosophiques (qui traitent de l'indétermination), à travers le processus de neutrosophication, sont impliquées, telles que : la neutrosophie (une nouvelle branche de la philosophie), l'ensemble neutrosophique, la logique neutrosophique, la probabilité neutrosophique et les statistiques neutrosophiques, l'analyse neutrosophique, la mesure neutrosophique, et ainsi de suite. La neutrosophie étudie uniquement les triades (<A>, <neutA>, <antiA>), où <A> est un élément ou un concept, qui ont du sens dans le monde réel.

Par conséquent, au cœur de la neutrosophie, elle étend la logique binaire classique en introduisant un système logique à trois valeurs. Les trois composantes sont :

- *Truth* / Vérité (T) : Représente ce qui est vrai.
- *Falsehood* / Fausseté (F) : Représente ce qui est faux.

1. Florentin Smarandache (2002). "Neutrosophy, A New Branch of Philosophy." *Multiple Valued Logic* 8(3): 297-384. An International Journal published by Taylor & Francis Group, UK and USA, ISSN 1023-6627. Le titre en français : « Neutrosophie, une nouvelle branche de la philosophie. » Article disponible en ligne : https://fs.unm.edu/Neutrosophy-A-New-Branch-of-Philosophy.pdf.

- *Indeterminacy* / Indétermination (I) : Capture ce qui est indéterminé, incertain ou contradictoire.

La neutrosophie postule que chaque proposition a simultanément un degré de vérité, un degré de fausseté et un degré d'indétermination, reflétant la nature complexe et souvent contradictoire des phénomènes du monde réel. Ce changement de paradigme permet une compréhension plus nuancée de la réalité, où la vérité absolue et la fausseté sont souvent entrelacées avec des éléments d'incertitude.

1.1. Neutrosophication

Le processus de neutrosophication signifie :

- convertir un concept précis {c'est-à-dire un concept (1, 0, 0), ce qui signifie un concept qui est à 100% vrai, 0% indéterminé et 0% faux} en un concept neutrosophique {c'est-à-dire un concept (*T, I, F*), qui est *T*% vrai, *I*% indéterminé et *F*% faux - ce qui reflète plus précisément notre réalité imparfaite et non idéaliste}, ou plus généralement en un concept raffiné (T_1, T_2, …; I_1, I_2, …; F_1, F_2, …);
- ou la conversion de nombres précis (1 ou 0), flous (*T*), ou flous intuitionnistes (*T, F*) en un nombre neutrosophique (*T, I, F*);
- ou la conversion d'un nombre précis (exact) *N* en un nombre neutrosophique de la forme $N = a + bI$, où *a* est la partie déterminée du nombre *N* et *bI* la partie indéterminée du nombre *N*.

2. L'Ensemble neutrosophique

Soit *U* un univers de discours, et *M* un ensemble inclus dans *U*. Un élément *x* de *U* est noté par rapport à l'ensemble *M* comme *x(T, I, F)* et appartient à *M* de la manière suivante : il est *t*% vrai dans l'ensemble, *i*% indéterminé (inconnu s'il est) dans l'ensemble, et *f*% faux, où *t* varie dans *T*, *i* varie dans *I*, *f* varie dans *F*.

Statiquement, *T, I, F* sont des sous-ensembles, mais dynamiquement, *T, I, F* sont des fonctions/opérateurs dépendant de nombreux paramètres connus ou inconnus.

L'ensemble neutrosophique[2] est une généralisation de l'ensemble flou intuitionniste, de l'ensemble flou intuitionniste inconsistent, de l'ensemble flou q-Rung Orthopair, de l'ensemble flou sphérique et de l'ensemble flou hypersphérique *n*.

La Neutrosophie a également été étendue à la Neutrosophie Raffinée, et par conséquent, la Neutrosophication a été étendue à la Neutrosophication Raffinée. Ainsi, la théorie du regret, la théorie des systèmes gris et la décision à trois voies sont des cas particuliers de la Neutrosophication et de la Probabilité Neutrosophique. Smarandache a également étendu la décision à trois voies à la décision à *n* voies, cette dernière étant un cas particulier de la Neutrosophie Raffinée. L'ensemble Neutrosophique généralise également l'ensemble paraconsistant, l'ensemble intuitionniste, etc.

3. La Logique neutrosophique

La Logique neutrosophique[3] est un cadre général pour l'unification de nombreuses logiques existantes, telles que la logique floue (en particulier la logique floue intuitionniste), la logique paraconsistante, la logique intuitionniste, etc. L'idée principale est de caractériser chaque énoncé logique dans un Espace Neutrosophique en 3D, où chaque dimension de l'espace représente respectivement la vérité (*T*), la fausseté (*F*), et l'indétermination (*I*) de l'énoncé en question, où *T, I, F*

2. Florentin Smarandache (2007). "A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics." Sixth edition. First published in 1998. Ann Arbor: InfoLearnQuest, 156 p. Le titre en français : « Un champ unificateur en logiques : la logique neutrosophique. Neutrosophie, ensemble neutrosophique, probabilité et statistiques neutrosophiques. » Article disponible en ligne : http://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf.
3. *Ibidem*.

sont des sous-ensembles réels standard ou non standard de]-0, 1+[sans nécessairement aucun lien entre eux.

Pour la logique neutrosophique à valeur unique, la somme des composantes est :

- $0 \leq t+i+f \leq 3$ lorsque les trois composantes sont indépendantes ;
- $0 \leq t+i+f \leq 2$ lorsque deux composantes sont dépendantes, tandis que la troisième est indépendante d'elles ;
- $0 \leq t+i+f \leq 1$ lorsque les trois composantes sont dépendantes.

Lorsque trois ou deux des composantes *T, I, F* sont indépendantes, on laisse place à des informations incomplètes (somme < 1), des informations paraconsistantes et contradictoires (somme > 1), ou des informations complètes (somme = 1).

Si les trois composantes *T, I, F* sont dépendantes, alors de manière similaire on laisse place à des informations incomplètes (somme < 1), ou des informations complètes (somme = 1).

4. Les Statistiques neutrosophiques

Alors que les statistiques classiques traitent exclusivement de données déterminées et de méthodes d'inférence, les statistiques neutrosophiques s'occupent de données indéterminées - des données présentant différents degrés d'indétermination, telles qu'incertaines, vagues, partiellement inconnues, contradictoires ou incomplètes. Dans les statistiques neutrosophiques,[4] les méthodes d'inférence intègrent également des degrés d'indétermination. Par exemple, au lieu de s'appuyer uniquement sur des arguments nets et des valeurs pour les distributions de probabilité, les graphiques, les diagrammes, les algorithmes ou les fonctions, on peut rencontrer des arguments et des valeurs inexacts ou ambigus.

Par exemple, les tailles de population ou d'échantillon pourraient ne pas être précisément connues en raison d'individus qui n'appartiennent que partiellement à la population ou à l'échantillon, ou d'individus dont le statut d'appartenance est complètement inconnu. De plus, certains individus de la population ou de l'échantillon peuvent avoir des données indéterminées.

Les statistiques neutrosophiques sont également une généralisation des statistiques par intervalles. Alors que les statistiques par intervalles reposent sur l'analyse par intervalles, les statistiques neutrosophiques sont basées sur l'analyse par ensembles, englobant tous types d'ensembles, pas seulement les intervalles (comme les ensembles discrets finis). De plus, les statistiques classiques et les statistiques par intervalles supposent que tous les individus d'un échantillon ou d'une population appartiennent à 100 % à celui-ci. Cependant, dans la réalité, les individus appartiennent souvent seulement partiellement, partiellement ne pas appartenir, ou leur appartenance est indéterminée. Les statistiques neutrosophiques produisent des résultats plus précis que les statistiques classiques et les statistiques par intervalles en tenant compte de manière appropriée des différents degrés d'appartenance.

5. La Probabilité neutrosophique

Les distributions de probabilité neutrosophiques peuvent être représentées par trois courbes : l'une indiquant la probabilité de l'événement se produisant, une autre indiquant la probabilité de l'événement ne se produisant pas, et une troisième représentant la probabilité indéterminée de l'événement se produisant ou non.

Bien sûr, les ensembles de données neutrosophiques, où les données présentent un certain degré d'indétermination, sont utilisés dans les statistiques neutrosophiques. La probabilité neutrosophique est une généralisation de la probabilité classique et de la probabilité imprécise dans laquelle la chance qu'un événement A se produise est de *t*% vrai - où *t* varie dans le sous-ensemble *T*, *i*% indéterminé - où *i* varie dans le sous-ensemble *I*, et *f*% faux - où *f* varie dans le sous-ensemble *F*.

4. *Ibidem*.

En probabilité classique, la somme de toutes les probabilités de l'espace est égale à 1, tandis qu'en probabilité neutrosophique, elle est égale à 3.

En probabilité imprécise : la probabilité d'un événement est un sous-ensemble T dans [0, 1], et non un nombre p dans [0, 1], ce qui reste est censé être l'opposé, le sous-ensemble F (également de l'intervalle unitaire [0, 1]); il n'y a pas de sous-ensemble I indéterminé en probabilité imprécise.[5]

La fonction qui modélise la probabilité neutrosophique d'une variable aléatoire x est appelée distribution neutrosophique : $NP(x) = (T(x), I(x), F(x))$, où $T(x)$ représente la probabilité que la valeur x se produise, $F(x)$ représente la probabilité que la valeur x ne se produise pas, et $I(x)$ représente la probabilité indéterminée/inconnue de la valeur x.[6]

6. La Physique neutrosophique

La physique neutrosophique décrit des collections d'objets ou d'états qui sont individuellement caractérisés par des propriétés contradictoires, ou ne sont caractérisés ni par une propriété ni par l'opposé de cette propriété, ou sont composés de sous-éléments contradictoires. De tels objets ou états sont appelés entités neutrosophiques.

Par conséquent : une entité physique qui est une combinaison d'éléments opposés, ou une entité physique qui possède une propriété P et également l'opposé de la propriété P, ou une entité physique qui n'a ni la propriété Q ni l'opposé de la propriété Q.

La physique neutrosophique signifie un mélange de concepts / idées / espaces / lois / théories / objets physiques <*A*> avec leurs opposés <*antiA*> ou avec leur neutre <*neutA*>, où <*neutA*> est la neutralité par rapport à <*A*>, et signifie ni <*A*> ni <*antiA*> mais entre les deux ; c'est-à-dire des combinaisons de choses hétérogènes et contradictoires qui tiennent ensemble. Il existe de nombreux cas dans les domaines scientifiques (et humanistiques) où deux ou trois de ces éléments <*A*>, <*antiA*>, <*neutA*> coexistent.

Un élément <*A*> et son opposé <*antiA*> ou leur neutre <*neutA*> peuvent être simultanément valides.

Quelques exemples d'entités neutrosophiques :

- les anyons dans deux dimensions spatiales sont des particules de spin arbitraire qui ne sont ni des bosons (spin entier) ni des fermions (spin demi-entier) ;
- parmi les candidats possibles à la matière noire, il peut y avoir des particules exotiques qui ne sont ni des fermions de Dirac ni des fermions de Majorana ;
- le mercure (Hg) est un état qui n'est ni liquide ni solide dans des conditions normales à température ambiante ;
- les matériaux non magnétiques ne sont ni ferromagnétiques ni antiferro-magnétiques ;
- le plasma quark-gluon (QGP) est une phase formée par des quarks et gluons quasi-libres qui ne se comporte ni comme un plasma conventionnel ni comme un liquide ordinaire ;
- l'unmatière (*unmatter*),[7] qui est formée par la matière et l'antimatière qui se lient ensemble ;
- le kaon neutre, qui est un composite pion & anti-pion et donc une forme d'unmatière ;

5. Florentin Smarandache (2013). "Introduction to Neutrosophic Measure, Neutrosophic Integral, and Neutrosophic Probability." Craiova (Roumanie) : Sitech, 140 p. ISBN: 978-1-59973-253-4. Le titre en français : « Introduction à la Mesure Neutrosophique, à l'Intégrale Neutrosophique et à la Probabilité Neutrosophique. » Livre disponible en ligne : http://fs.unm.edu/NeutrosophicMeasureIntegralProbability.pdf
6. Florentin Smarandache (2014). "Introduction to Neutrosophic Statistics." Craiova (Roumanie): Sitech, 124 p. ISBN 978-1-59973-274-9. Le titre en français : « Introduction aux Statistiques Neutrosophiques ». Livre disponible en ligne : http://fs.unm.edu/NeutrosophicStatistics.pdf
7. Ervin Goldfain, Florentin Smarandache (2008). "On Emergent Physics, "Unparticles" and Exotic "Unmatter" States." *Progress in Physics* 4:10-15. Le titre en français : « Sur la physique émergente, les « unparticules » et les états exotiques de « unmatière ». » Article disponible en ligne : https://fs.unm.edu/PP-15-02.pdf

- les méthodes neutrosophiques en relativité générale ; etc.

7. La Personnalité neutrosophique

Les principes neutrosophiques sont précieux en psychologie aussi, particulièrement dans l'étude de la cognition humaine. Les pensées et les émotions humaines sont rarement binaires ; elles sont souvent remplies d'incertitude et d'ambivalence. La logique neutrosophique offre un moyen de modéliser ces processus cognitifs de manière plus précise, ce qui peut conduire à de meilleurs outils de diagnostic et à des stratégies thérapeutiques plus efficaces. Par exemple, dans la thérapie cognitive-comportementale, reconnaître les aspects indéterminés des croyances et des émotions d'un patient peut mener à des plans de traitement plus efficaces.

En conséquence, Smarandache a proposé la Neutropsyche[8] comme une théorie psychologique qui explore l'esprit à travers le prisme de la neutrosophie et des théories neutrosophiques. La Personnalité Neutropsychique est un système psychologique dynamique et ouvert, défini par les tendances uniques d'un individu à ressentir, penser et agir.

En outre, Smarandache a défini la Mémoire Raffinée Neutrosophique qui conceptualise la mémoire en trois catégories : conscience, aconscience (un mélange de conscience et d'inconscience) et inconscience. Dans la Psychanalyse Neutrosophique, le 'ça' de Freud (*das Es*) est renommé 'sous-moi' pour créer une connexion symétrique avec le 'moi' et le 'surmoi'. Cette approche étend certains aspects de la psychanalyse de Freud tout en en rejetant d'autres.

Smarandache évalue que tous les souvenirs possèdent des degrés de conscience (c), des degrés d'aconscience (a) et des degrés d'inconscience (u). Chaque individu présente un degré d'anti-trait et un degré de trait par rapport à chaque paire anti-trait—trait de la personnalité. La Personnalité de Trait suit une Évolution Neutrosophique, caractérisée par des degrés d'Évolution, d'Indétermination et d'Involution. Grâce à l'adaptation et à la sélection sociale, certains traits de personnalité évoluent (et les gènes responsables de ceux-ci sont exprimés), d'autres restent inchangés ou leur changement est indéterminé, et une troisième catégorie de traits - ceux moins nécessaires dans un nouvel environnement - subit une involution (et les gènes responsables de ceux-ci cessent d'être exprimés).

8. La Neutrosociologie

La neutrosociologie[9] applique les principes de la neutrosophie au domaine de la sociologie, offrant de nouvelles façons de comprendre et d'analyser les phénomènes sociaux caractérisés par l'incertitude, l'ambiguïté et la complexité. Cette approche améliore les méthodes sociologiques traditionnelles en intégrant la nature indéterminée et souvent contradictoire des dynamiques sociales, visant à comprendre les attitudes et les comportements sociaux, analyser les conflits sociaux, examiner les réseaux sociaux, étudier le changement social et améliorer la recherche qualitative.

9. La Théorie neutrosophique de l'Évolution, de l'Involution et de l'Indétermination

Pendant le processus d'adaptation d'un être (végétal, animal ou humain) à un nouvel environnement ou à de nouvelles conditions, l'être évolue partiellement, dévolue partiellement (dégénère) et est partiellement indéterminé, c'est-à-dire ni en évolution ni en dévolution, donc

8. Florentin Smarandache (2018). "Neutropsychic Personality. A mathematical approach to psychology." Third updated edition. Brussels: Pons, 131 p. ISBN 978-1-59973-583-2. Le titre en français : « La Personnalité Neutropsychique. Une approche mathématique de la psychologie. » Livre disponible en ligne : https://fs.unm.edu/NeutropsychicPersonality-ed2.pdf
9. Florentin Smarandache (2019). "Introduction to Neutrosophic Sociology (Neutrosociology)." Brussels: Pons, 131 p. ISBN: 978-1-59973-605-1. Le titre en français : « Introduction à la Sociologie Neutrosophique (Neutrosociologie). » Livre disponible en ligne : https://fs.unm.edu/Neutrosociology.pdf

inchangé (neutre), ou le changement est flou, ambigu, vague, comme dans la logique neutrosophique. Grâce à l'adaptation, on a donc : évolution, involution et indétermination (ou neutralité), chacun de ces trois composants neutrosophiques à un certain degré. Les degrés d'évolution/indétermination/involution se réfèrent à la fois : à la structure de l'être (ses parties du corps), et à la fonctionnalité de l'être (la fonctionnalité de chaque partie, ou l'interfonctionnalité des parties entre elles, ou la fonctionnalité de l'être dans son ensemble). Avec cette clarification à l'esprit, Smarandache a donc introduit la Théorie Neutrosophique de l'Évolution, de l'Involution et de l'Indétermination (ou Neutralité).[10]

10. La Génétique neutrosophique

La génétique neutrosophique[11] est l'étude de la génétique utilisant la logique, l'ensemble, la probabilité, les statistiques, la mesure et d'autres outils et procédures neutrosophiques. Basée sur la Théorie Neutrosophique de l'Évolution (qui inclut des degrés d'Évolution, de Neutralité (ou Indétermination), et d'Involution) – en tant qu'extension de la Théorie de l'Évolution de Darwin, Smarandache montre l'applicabilité de la neutrosophie en génétique, et présente dans le cadre de la génétique neutrosophique les concepts suivants : mutation neutrosophique, spéciation neutrosophique, et coévolution neutrosophique.

11. Chronologie neutrosophique

1995-1998 Smarandache généralise le Yin Yang et la dialectique à la Neutrosophie
http://fs.unm.edu/Neutrosophy-A-New-Branch-of-Philosophy.pdf
L'ensemble/logique/probabilité/statistiques neutrosophiques
L'ensemble neutrosophique à valeur unique
http://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf

1998 et 2019 Logique Neutrosophique Non Standard, Ensemble, Probabilité
https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1903/1903.04558.pdf

2002 Types spéciaux d'ensembles / probabilités / statistiques / logiques
http://fs.unm.edu/DefinitionsDerivedFromNeutrosophics.pdf

- ensemble intuitionniste, ensemble paraconsistant, ensemble faillibiliste, ensemble paradoxiste, ensemble pseudo-paradoxiste, ensemble tautologique, ensemble nihiliste, ensemble dialéthéiste, ensemble trivialiste;
- probabilité et statistiques intuitionnistes, probabilité et statistiques paraconsistantes, probabilité et statistiques faillibilistes
- probabilité et statistiques paradoxistes, probabilité et statistiques pseudo-paradoxistes, probabilité et statistiques tautologiques, probabilité et statistiques nihilistes, probabilité et statistiques dialéthéistes, probabilité et statistiques trivialistes;

10. Florentin Smarandache (2017). "Introducing a Theory of Neutrosophic Evolution: Degrees of Evolution, Indeterminacy, and Involution." *Progress in Physics* 13(2): 130-135. Le titre en français : « Introduction à une théorie de l'évolution neutrosophique : degrés d'évolution, indétermination et involution. » Article disponible en ligne : https://fs.unm.edu/neutrosophic-evolution-PP-49-13.pdf
11. Florentin Smarandache (2021). "Introduction to Neutrosophic Genetics." *International Journal of Neutrosophic Science* 13(1): 23-27. Le titre en français : « Introduction à la la génétique neutrosophique. » Article disponible en ligne : http://fs.unm.edu/NeutrosophicGenetics.pdf.

- logique paradoxiste (ou paradoxisme), logique pseudo-paradoxiste (ou pseudo-paradoxisme), logique tautologique (ou tautologisme);

2003 Nombres neutrosophiques ($a+bI$, où I = indétermination)
Structures algébriques I-neutrosophiques
Cartes cognitives neutrosophiques
http://fs.unm.edu/NCMs.pdf

2005 L'Ensemble/Logique Neutrosophique Intervalle
http://fs.unm.edu/INSL.pdf

2006 Degré de Dépendance et Degré d'Indépendance entre T, I, et F
http://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf
http://fs.unm.edu/NSS/DegreeOfDependenceAndIndependence.pdf

2007 L'Overset Neutrosophique (lorsqu'un composant neutrosophique est > 1), l'Underset Neutrosophique (lorsqu'un composant neutrosophique est < 0), et l'Offset Neutrosophique (lorsque certains composants neutrosophiques sont en dehors de l'intervalle [0, 1], c'est-à-dire que certains composants neutrosophiques > 1 et d'autres composants neutrosophiques < 0)
La Logique, la Mesure, la Probabilité,
les Statistiques Neutrosophiques Over/Under/Off.
http://fs.unm.edu/NSS/DegreesOf-Over-Under-Off-Membership.pdf
http://fs.unm.edu/SVNeutrosophicOverset-JMI.pdf
http://fs.unm.edu/IV-Neutrosophic-Overset-Underset-Offset.pdf
http://fs.unm.edu/NeutrosophicOversetUndersetOffset.pdf
L'Ensemble Tripolaire Neutrosophique et l'Ensemble Multipolaire Neutrosophique
Le Graph Tripolaire Neutrosophique et le Graph Multipolaire Neutrosophique
http://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf
http://fs.unm.edu/IFS-generalized.pdf

2009 la N-norme et de la N-conorme
http://fs.unm.edu/N-normN-conorm.pdf

2013 Développement de la Probabilité neutrosophique :
http://fs.unm.edu/NeutrosophicMeasureIntegralProbability.pdf
Raffination des composants (T, I, F) en (T_1, T_2, ...; I_1, I_2, ...; F_1, F_2, ...)
http://fs.unm.edu/n-ValuedNeutrosophicLogic-PiP.pdf

2014 La Loi du Multiple-Milieu Inclus (<A>; <neutA$_1$>, <neutA$_2$>, ..., <neutA$_k$>; <antiA>)
http://fs.unm.edu/LawIncludedMultiple-Middle.pdf
Statistiques neutrosophiques
http://fs.unm.edu/NS/NeutrosophicStatistics.htm
http://fs.unm.edu/NeutrosophicStatistics.pdf

2015 Pré-Calcul neutrosophique et Calcul neutrosophique
http://fs.unm.edu/NeutrosophicPrecalculusCalculus.pdf
Nombres Neutrosophiques Raffinés ($a + b_1I_1 + b_2I_2 + ... + b_nI_n$)
Graphs Neutrosophiques
Thèse-Antithèse-Neutrothèse, et Neutrosynthèse

Système Axiomatique Neutrosophique
Systèmes Dynamiques Neutrosophiques
La Logique Neutrosophique Symbolique
Structures (*t, i, f*)-Neutrosophiques
Structures Algébriques Neutrosophiques Quadruples
Loi de Multiplication des Subindéterminations
http://fs.unm.edu/SymbolicNeutrosophicTheory.pdf
Indéterminations neutrosophiques naturelles
http://fs.unm.edu/MODNeutrosophicNumbers.pdf
L'Ensemble Crisp Neutrosophique <A, B, C>
http://fs.unm.edu/NeutrosophicCrispSetTheory.pdf

2016 Multisets Neutrosophiques
http://fs.unm.edu/NeutrosophicMultisets.htm
Structures Triplets Neutrosophiques
Structures Triplets Étendues Neutrosophiques
http://fs.unm.edu/NeutrosophicTriplets.htm
Structures Duplets Neutrosophiques
http://fs.unm.edu/NeutrosophicDuplets.htm

2017 La Théorie de l'Évolution Neutrosophique
Degrés d'Évolution, Indétermination ou Neutralité, et Involution
http://fs.unm.edu/neutrosophic-evolution-PP-49-13.pdf

2017-2019 La Plithogénie (généralisation de la Dialectique et de la Neutrosophie)
L'Ensemble/Logique/Probabilité/Statistiques Plithogéniques
http://fs.unm.edu/P/
Structures Algébriques Plithogéniques Symboliques :
https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1808/1808.03948.pdf
http://fs.unm.edu/Plithogeny.pdf

2018-2022 Nouveaux types d'ensembles flous

- L'Ensemble HyperSoft,
- L'Ensemble IndetermSoft,
- L'Ensemble IndetermHyperSoft,
- L'Ensemble TreeSoft.

http://fs.unm.edu/TSS/
https://fs.unm.edu/NSS/ExtensionOfSoftSetToHypersoftSet.pdf

2018 La Psychologie Neutrosophique

- Neutropsyche,
- Personnalité Neutropsychique,
- Mémoire Neutrosophique Raffinée : consciente, a-consciente, inconsciente,
- Personnalité Neutropsychique Crisp,
- Fonctionnement Corps-Âme-Esprit Neutrosophique.

http://fs.unm.edu/NeutropsychicPersonality-ed3.pdf

2019 Théorie de l'Évolution Humaine Neutrosophique en Spirale

http://fs.unm.edu/SpiralNeutrosophicEvolution.pdf
La Sociologie Neutrosophique (Neutrosociologie)
https://fs.unm.edu/Neutrosociology.pdf

Ensemble Crisp Neutrosophique Raffiné
http://fs.unm.edu/RefinedNeutrosophicCrispSet.pdf
Généralisation des Structures Algébriques classiques aux Structures Algébriques Neutro (ou NeutroAlgèbres) et des Structures Algébriques Anti (ou AntiAlgèbres)
http://fs.unm.edu/NeutroAlgebra.htm

2019-2022 Introduction de nouveaux types de topologies

- Topologie Neutrosophique Raffinée,
- Topologie Crisp Neutrosophique Raffinée,
- NeutroTopologie, AntiTopologie,
- SuperHyperTopologie,
- SuperHyperTopologie Neutrosophique

http://fs.unm.edu/NSS/NewTypesTopologies-Improved14.pdf
http://fs.unm.edu/TT/
L'Extension de l'HyperGraph au SuperHyperGraph
http://fs.unm.edu/NSS/n-SuperHyperGraph-n-HyperAlgebra.pdf

2020 La Génétique Neutrosophique
http://fs.unm.edu/NeutrosophicGenetics.pdf

2021 NeutroGéométrie et AntiGéométrie
http://fs.unm.edu/NG/
http://fs.unm.edu/NSS/NeutroGeometryAntiGeometry31.pdf
http://fs.unm.edu/NSS/ExamplesNeutroGeometryAntiGeometry35.pdf
La Logique Plithogénique (généralisation de la Logique Multivariée)
http://fs.unm.edu/NSS/IntroductionPlithogenicLogic1.pdf
La Probabilité Plithogénique, Les Statistiques Plithogéniques
http://fs.unm.edu/NSS/PlithogenicProbabilityStatistics20.pdf

2022 SuperHyperAlgèbre & SuperHyperAlgèbre Neutrosophique
http://fs.unm.edu/SuperHyperAlgebra.pdf
SuperHyperGraph, SuperHyperGraph Neutrosophique
http://fs.unm.edu/NSS/n-SuperHyperGraph.pdf
SuperHyperFonction, SuperHyperTopologie
http://fs.unm.edu/NSS/SuperHyperFunction37.pdf
L'Ensemble IndetermSoft, l'Ensemble IndetermHyperSoft
https://fs.unm.edu/TSS/NewTypesSoftSets-Improved.pdf
http://fs.unm.edu/NSS/IndetermSoftIndetermHyperSoft38.pdf
L'Ensemble TreeSoft
http://fs.unm.edu/NSS/IndetermSoftSet-TreeSoftSet59.pdf

2023 Structures Algébriques Plithogéniques Symboliques
http://fs.unm.edu/NSS/SymbolicPlithogenicAlgebraic39.pdf

La Cryptologie Neutrosophique
http://fs.unm.edu/NeutrosophicCryptography1.pdf
http://fs.unm.edu/NeutrosophicCryptography2.pdf
http://fs.unm.edu/NSS/2OnANovelSecurityScheme.pdf

1998-2024 Applications Neutrosophiques en :

- Intelligence Artificielle, Systèmes d'Information, Informatique, Cybernétique, Méthodes Théoriques, Structures Algébriques Mathématiques, Mathématiques Appliquées, Automatisation, Systèmes de Contrôle, Big Data, Ingénierie, Électricité, Électronique, Philosophie, Sciences Sociales, Psychologie, Biologie, Génétique, Ingénierie Biomédicale, Informatique Médicale, Recherche Opérationnelle, Science de la Gestion, Science de l'Imagerie, Technologie Photographique, Instruments, Instrumentation, Physique, Optique, Économie, Mécanique, Neurosciences, Radiologie Nucléaire, Médecine, Imagerie Médicale, Applications Interdisciplinaires, Sciences Multidisciplinaires, etc.

12. Conclusions

La neutrosophie, avec son approche novatrice de la logique et de l'indétermination, offre des perspectives profondes et des outils pratiques dans un large éventail de disciplines. En embrassant la complexité et l'incertitude du monde réel, la neutrosophie permet une compréhension plus précise et nuancée de divers phénomènes. Alors que la recherche et les applications de la neutrosophie continuent de s'étendre,[12] son impact sur la philosophie, les mathématiques, la sociologie, la psychologie, la biologie et au-delà devrait s'approfondir, offrant de nouvelles façons de naviguer et de donner du sens à notre monde complexe.

Bibliographie

1. Florentin Smarandache (2002). "Neutrosophy, A New Branch of Philosophy." *Multiple Valued Logic* 8(3): 297-384. An International Journal published by Taylor & Francis Group, UK and USA, ISSN 1023-6627. Le titre en français : « Neutrosophie, une nouvelle branche de la philosophie. » Article disponible en ligne : https://fs.unm.edu/Neutrosophy-A-New-Branch-of-Philosophy.pdf.
2. Florentin Smarandache (2007). "A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics." Sixth edition. First published in 1998. Ann Arbor: InfoLearnQuest, 156 p. Le titre en français : « Un champ unificateur en logiques : la logique neutrosophique. Neutrosophie, ensemble neutrosophique, probabilité et statistiques neutrosophiques. » Article disponible en ligne : http://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf.
3. Florentin Smarandache (2013). "Introduction to Neutrosophic Measure, Neutrosophic Integral, and Neutrosophic Probability." Craiova (Roumanie) : Sitech, 140 p. ISBN: 978-1-59973-253-4. Le titre en français : « Introduction à la Mesure Neutrosophique, à l'Intégrale Neutrosophique et à la Probabilité Neutrosophique. » Livre disponible en ligne : http://fs.unm.edu/NeutrosophicMeasureIntegralProbability.pdf
4. Florentin Smarandache (2014). "Introduction to Neutrosophic Statistics." Craiova (Roumanie): Sitech, 124 p. ISBN 978-1-59973-274-9. Le titre en français : « Introduction aux Statistiques Neutrosophiques ». Livre disponible en ligne : http://fs.unm.edu/NeutrosophicStatistics.pdf

12. Xindong Peng, Jingguo Dai (2020). "A bibliometric analysis of neutrosophic set: two decades review from 1998 to 2017." *Artificial Intelligence Review* 53:199–255. Le titre en français : « Une analyse bibliométrique de l'ensemble neutrosophique : revue de deux décennies de 1998 à 2017. » Article disponible en ligne : https://doi.org/10.1007/s10462-018-9652-0, ou aussi: http://fs.unm.edu/BibliometricNeutrosophy.pdf.

5. Ervin Goldfain, Florentin Smarandache (2008). "On Emergent Physics, "Unparticles" and Exotic "Unmatter" States." *Progress in Physics* 4:10-15. Le titre en français : « Sur la physique émergente, les « unparticules » et les états exotiques de « unmatière ». » Article disponible en ligne : https://fs.unm.edu/PP-15-02.pdf
6. Florentin Smarandache (2018). "Neutropsychic Personality. A mathematical approach to psychology." Third updated edition. Brussels: Pons, 131 p. ISBN 978-1-59973-583-2. Le titre en français : « La Personnalité Neutropsychique. Une approche mathématique de la psychologie. » Livre disponible en ligne : https://fs.unm.edu/NeutropsychicPersonality-ed2.pdf
7. Florentin Smarandache (2019). "Introduction to Neutrosophic Sociology (Neutrosociology)." Brussels: Pons, 131 p. ISBN: 978-1-59973-605-1. Le titre en français : « Introduction à la Sociologie Neutrosophique (Neutrosociologie). » Livre disponible en ligne : https://fs.unm.edu/Neutrosociology.pdf
8. Florentin Smarandache (2017). "Introducing a Theory of Neutrosophic Evolution: Degrees of Evolution, Indeterminacy, and Involution." *Progress in Physics* 13(2): 130-135. Le titre en français : « Introduction à une théorie de l'évolution neutrosophique : degrés d'évolution, indétermination et involution. » Article disponible en ligne : https://fs.unm.edu/neutrosophic-evolution-PP-49-13.pdf
9. Florentin Smarandache (2021). "Introduction to Neutrosophic Genetics." *International Journal of Neutrosophic Science* 13(1): 23-27. Le titre en français : « Introduction à la la génétique neutrosophique. » Article disponible en ligne : http://fs.unm.edu/NeutrosophicGenetics.pdf.
10. Xindong Peng, Jingguo Dai (2020). "A bibliometric analysis of neutrosophic set: two decades review from 1998 to 2017." *Artificial Intelligence Review* 53:199–255. Le titre en français : « Une analyse bibliométrique de l'ensemble neutrosophique : revue de deux décennies de 1998 à 2017. » Article disponible en ligne : https://doi.org/10.1007/s10462-018-9652-0, ou aussi: http://fs.unm.edu/BibliometricNeutrosophy.pdf.

Neutrosophic Knowledge (NK) is an academic journal, published quarterly online and on paper, that has been created for publishing in all scientific and literary fields. Papers Published in Arabic, Turkish and English, French.
ISSN (print): 2767-0619, ISSN (online): 2767-0627
The papers should be professional, in good Arabic, Turkish, English and French, containing a brief review of a problem and obtained results. All submissions should be designed in MS Word format using our template file:
http://fs.unm.edu/NK/
Submit your paper by email to: **neutrosophic.knowledge@gmail.com**. To order printed issues, contact the Editor-in Chief. This journal is non-commercial, academic edition. It is printed from private donations. The neutrosophics website at UNM is: http://fs.unm.edu/neutrosophy.htm
The home page of the journal is accessed on:
http://fs.unm.edu/NK/

Editors in Chief

Dr. Salah Bouzina
Department of Philosophy, Faculty of Human Science and Sociology, University Constantine 2 Abdelhamid Mehri,
Constantine 25000, Algeria
E-mail: salah.bouzina@univ-constantine2.dz

Prof. Dr. Florentin Smarandache
Department of Mathematics and Science
University of New Mexico
705 Gurley Avenue
Gallup, NM 87301, USA
E-mail: smarans@unm.edu