

ALGEBRAIK VA TRIGONOMETRIK MASALALARNI GEOMETRIK USULDA YECHISH

Abduraxmonov Baxromjon Alisherovich¹
Ochilova Aziza Yorqul qizi²

¹Toshkent farmatsevtika instituti "Fizika, matematika va axborot texnologiyalari" kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent

²Toshkent farmatsevtika instituti "Fizika, matematika va axborot texnologiyalari" kafedrasi assistenti

<https://www.doi.org/10.5281/zenodo.10007654>

ARTICLE INFO

Received: 08th Oktober 2023

Accepted: 15th Oktober 2023

Online: 16th Oktober 2023

KEY WORDS

Algebraik va trigonometrik tenglamalar, algebraik ifodalar, tenglamalar sistemasi.

ABSTRACT

Ushbu maqolada ba'zi algebraik va trigonometrik ifodalarni hisoblashda geometrik shakllarining xossalaridan foydalanib yechish usullari o'rganilgan.

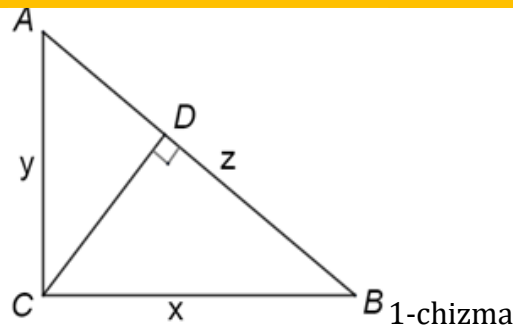
Matematika fanini o'qitishda o'quvchilarga berilgan matematik masalani yechishning bir necha usullarini ko'rsatib berish fan o'qituvchisining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi. Bu esa o'quvchilarda bir muammoni hal etishning turli yo'nalishlarda fikrlash qobiliyatini shakllantiradi va o'stiradi. Odatda trigonometrik ayniyatlarni isbotlashda, trigonometrik ifodalarni soddalashtirishda analitik usuldan foydalaniladi. Biz ushbu maqolada algebraik tenglamalar sistemasini yechish, trigonometrik ayniyatlarni isbotlash va trigonometrik ifodalarni hisoblashlarni geometrik usulda bayon etganmiz. O'quvchilarga algebraik va trigonometrik tushunchalarni bayon etishda geometriya fanida o'zlashtirgan bilimlariga tayangan holda o'rgatish ham muhim ahamiyatga ega.

Geometriya faniga xos bo'lmagan masalalarni geometrik usulda yechish usulini o'rgatish o'quvchilarning fanlararo bog'liqlikni teran tushunish, ilmiy tafakkuri, dunyo qarashi hamda ijodiy ishlash ko'nikmasini shakllanishiga hizmat qiladi.

Dastlab biz Pifagor teoremasi yordamida yechiladigan masalalarni tahlil qilaylik.

1-misol. Tenglamalar sistemasini yeching
$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ \frac{xy}{z} = 12 \end{cases}$$

Yechish. Aytaylik x, y, z - musbat sonlar bo'lsin. Katetlari x, y , va gipotenuzasi z bo'lgan ABC uchburchakni yasab olamiz.



Bu uchburchakni perimetri 60 ga, gipotenuzaga tushirilgan balandligi 12 ga teng (1-chizma). Sistemadagi 1-tenglamadan $(x + y)^2 = (60 - z)^2$ sistemaning 2 - va 3 - tenglamalaridan esa $(x + y)^2 = z^2 + 24z$ tenglamalarni hosil qilamiz. Bu ikkita tenglamalarning chap qismlari tengligidan

$$(60 - z)^2 = z^2 + 24z \Rightarrow 144 = 60^2 \Rightarrow z = 25 \text{ ekanligini topamiz. U holda, } \begin{cases} x + y = 35, \\ xy = 300 \end{cases}$$

bo'lib, bundan noma'lumlarning qiymatlari 15 va 20 larga tengligini aniqlaymiz.

Javob: (15; 20; 25) va (20; 15; 25).

2-misol. Tenglamalar sistemasini yeching:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y^2 + z^2 = 16, \\ y^2 = x \cdot z. \end{cases}$$

Yechish. Pifagor teoremasiga ko'ra, $x^2 + y^2 = 3^2$ tenglamadan, x va y $\triangle ABC$ ($\angle D$ to'g'ri burchak, 2-chizma) uchburchak katetlari, $AB = 3$ esa gepotenuza deb belgilaymiz. Ikkinchi tenglamadan $y^2 + z^2 = 16$ hisobga olgan holda, $\triangle BDC$ ni qaraylik. y va z katetlar, $BD = 3$ esa gepotenuza. Uchinchi tenglama $y^2 = x \cdot z$ dan y soni x va z ning o'rta proporsionali ekanligi ma'lum.

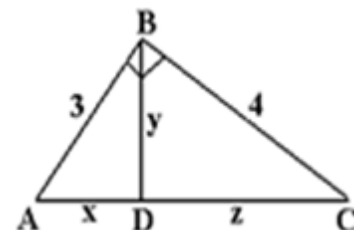
Qarama-qarshi teorema bo'yicha

$$\angle ABC = 90^\circ \quad AC = x + z = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

$$AB^2 = AD \cdot AC \Rightarrow 9 = x \cdot 5, \quad x = \frac{9}{5}.$$

$$BC^2 = DC \cdot AC \Rightarrow 16 = z \cdot 5, \quad z = \frac{16}{5}.$$

$$BD^2 = y^2 = x \cdot z = \frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5} \text{ va } BD = \frac{12}{5} = y.$$



Javob: $x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{12}{5}, \quad z = \frac{16}{5}.$

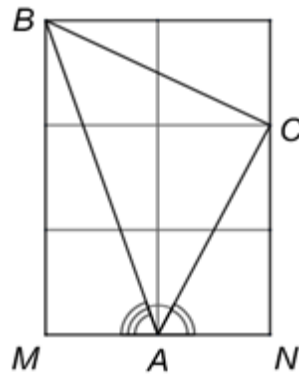
2-chizma

3-misol. Hisoblang: $\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3$.

Yechish: Bu teskari trigonometrik funksiyaning qiymatini topishda to'g'ri burchakli to'rtburchakdan foydalanamiz. Tomonlari 3 va 2 ga teng bo'lgan (3-chizma) to'g'ri burchakli to'rtburchakga ABC uchburchak chizamiz va quyidagicha belgilash kiritamiz.

$$\arctg 3 = \angle BAM, \quad \arctg 2 = \angle CAN, \quad \arctg 1 = \angle BAC.$$

$$MB = 3, \quad AM = 1 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$



3-chizma

$$CN = 2, AN = 1 \Rightarrow AC = \sqrt{5} = BC$$

Bu tengliklardan ko'rinadiki, ABC uchburchak teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak ekanligi.

$$\angle BCA = 90^0, \angle BAC = \angle ABC = 45^0$$

$$\angle BAM + \angle CAN + \angle BAC = \pi \Leftrightarrow \arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \pi$$

Javob: π .

4-misol. Hisoblang: $\sin 18^0$.

Yechish: Markazi O nuqtada, radius 1 ga va markaziy burchagi 36^0 ga teng bo'lgan aylananing OAB sektorini ko'rib chiqaylik (4-chizma). AB vatar chizamiz va OB radiusdan C nuqtani shunday tanlaylikki, $AC = AB$ bo'lsin, unda $\angle ACB = \angle ABC = 72^0$, $\angle CAB = 36^0$. Shunday qilib, $OC = AC$ bo'ladi.

$AB = x$, $CB = 1 - x$ bo'lsin. Chunki, AC OAB

uchburchakning bissektrisasi, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ proporsiyadan

$$x^2 + x - 1 = 0, (x > 0), x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Kosinuslar teoremasiga asosan:

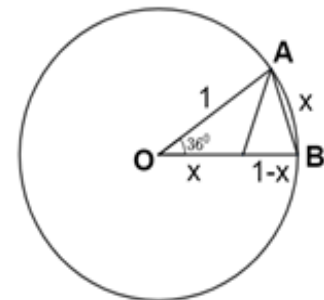
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \quad x^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \cos 36^0$$

$$x = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos 36^0)} = \sqrt{2(1 - \cos^2 18^0 + \sin^2 18^0)} = 2 \sin 18^0$$

$$\text{Bundan,} \quad \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{Javob:} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Xulosa: Geometrik yondashuvdan foydalanish trigonometrik masalalarni tushunishni yanada osonlashtiradi hamda bu orqali tezroq va to'g'ri yechim topish imkonini beradi.



4-chizma



Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Tenglamalar sistemasini yeching:
$$\begin{cases} x + y + z = 30, \\ x^2 + y^2 = z^2, \\ xy = 6z. \end{cases}$$

2. Ifodaning qiymatini toping:
$$\sqrt{21} \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{2}{5}\right).$$

3. Hisoblang: $\sin 15^{\circ}, \operatorname{tg} 15^{\circ}.$

References:

1. А.Н.Афанасьев, "Пять решений одной известной задачи". Математическое образование. 2018, № 3 (87), С: 2–7. Math-Net.Ru.
2. Florentin Smarandache. Compiled and Solved Problems in Geometry and Trigonometry//Educational Publisher, 2015.
3. И.Ф.Шарыгин, Задачи по геометрии (Планиметрия). Библиотечка "Квант". Наука. М.. 1986, 224 с.
4. P. Yui. Euclidean Geometry Notes, <http://math.fau.edu/Yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf>.
5. С.В.Романов, И.Ф.Шарыгин, Алгебраический метод решения геометрических задач. Квант. 1975, № 11, С. 47–49.
6. G'I.Botirov, A.Yo.Ochilov. Trigonometrik masalalarni geometrik usulda yechish. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal. 2023. №3. 117-121 bet.