

TWO TRIANGLES WITH THE SAME ORTHOCENTER AND A VECTORIAL PROOF OF STEVANOVIC'S THEOREM

ION PĂTRAȘCU⁶ and FLORENTIN SMARANDACHE⁷

Abstract. In this article we'll emphasize on two triangles and provide a vectorial proof of the fact that these triangles have the same orthocenter. This proof will, further allow us to develop a vectorial proof of the Stevanovic's theorem relative to the orthocenter of the Fuhrmann's triangle.

Lemma 1. Let ABC an acute angle triangle, H its orthocenter, and A', B', C' the symmetrical points of H in rapport to the sides BC, CA, AB . We denote by X, Y, Z the symmetrical points of A, B, C in rapport to $B'C', C'A', A'B'$. The orthocenter of the triangle XYZ is H .

Proof. We will prove that $XH \perp YZ$, by showing that $\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = 0$. We have (see Figure1) $\overrightarrow{VH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZC}$, from here $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BY} - \overrightarrow{ZC}$.

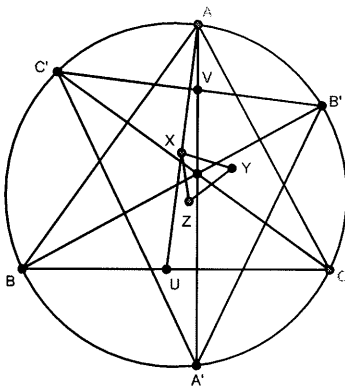


Figure 1

⁶ Colegiul Național „Frații Buzești” din Craiova

⁷ University of New Mexico, Gallup, NM 87301

Because Y is the symmetric of B in rapport to $A'C'$ and Z is the symmetric of C in rapport to $A'B'$, the parallelogram's rule gives us that: $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CA'}$. Therefore

$$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{BA'}) + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{A'C}$$

But, $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC'}$, $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA'}$, $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB'}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA'}$. By substituting these relations in the $\overrightarrow{YZ}$, we find:

$$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'B'}$$

We compute

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} &= (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AX}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'B'}) = \\ &= \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{C'B'} \end{aligned}$$

Because $AH \perp BC$ we have $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, also $AX \perp B'C'$ and therefore $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$. We need to prove also that $\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC}$. We note: $\{U\} = AX \cap BC$ and $\{V\} = AH \cap B'C'$. Then

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} &= AX \cdot BC \cdot \cos(\angle AUC) \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{C'B'} &= AH \cdot C'A' \cdot \cos(\angle AVC') \end{aligned}$$

We observe that $\angle AUC \equiv \angle AVC'$ (angles with the sides respectively perpendicular). The point B' is the symmetric of H in rapport to AC , consequently $\angle HAC \equiv \angle CAB'$, also the point C' is the symmetric of the point H in rapport to AB , and therefore $\angle HAB \equiv \angle BAC'$.

From these last two relations we find that $\angle B'AC' = 2\angle A$. The sinus theorem applied in the triangles $AB'C'$ and ABC gives:

$$B'C' = 2R \cdot \sin 2A$$

$$BC = 2R \sin A$$

We'll show that

$$AX \cdot BC = AH \cdot C'B',$$

and from here

$$AX \cdot 2R \sin A = AH \cdot 2R \cdot \sin 2A$$

which is equivalent to

$$AX = 2AH \cos A$$

We noticed that $\angle B'AC' = 2A$. Because $AX \perp B'C'$, it results that $\angle TAB \equiv \angle A$, we noted $\{T\} = AX \cap B'C'$. On the other side

$$AC' = AH, AT = \frac{1}{2}AY, \text{ and } AT = AC' \cos A = AH \cos A,$$

therefore $\overrightarrow{XH} \cdot \overrightarrow{YZ} = 0$.

Similarly, we prove that $YH \perp XZ$, and therefore H is the orthocenter of triangle XYZ .

Lemma 2. Let ABC a triangle inscribed in a circle, I the intersection of its bisector lines, and A', B', C' the intersections of the circumscribed circle with the bisectors AI, BI, CI respectively. The orthocenter of the triangle $A'B'C'$ is I .

Proof.

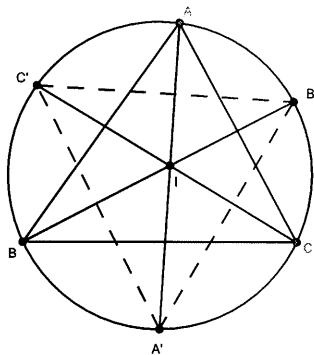


Figure 2

We'll prove that $A'I \perp B'C'$ (see Figure 2). Let $\alpha = m(\widehat{A'C}) = m(\widehat{A'B})$, $\beta = m(\widehat{B'C}) = m(\widehat{B'A})$, $\gamma = m(\widehat{C'A}) = m(\widehat{C'B})$. Then $m(\angle A'IC') = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$. Because $2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$ it results $m(\angle A'IC') = 90^\circ$, therefore $A'I \perp B'C'$.

Similarly, we prove that $B'I \perp A'C'$, and consequently the orthocenter of the triangle $A'B'C'$ is I .

Definition. Let ABC a triangle inscribed in a circle with the center in O and A', B', C' the middle of the arcs $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ respectively. The triangle XYZ formed by the symmetric of the points A', B', C' respectively in rapport to BC, CA, AB is called the *Fuhrmann triangle* of the triangle ABC .

Note. In 2002 the mathematician Milorad Stevanovic proved the following theorem:

Theorem (M. Stevanovic). *In an acute angle triangle the orthocenter of the Fuhrmann's triangle coincides with the center of the circle inscribed in the given triangle.*

Proof. We note $A'B'C'$ the given triangle and let A, B, C respectively the middle of the arcs $\widehat{B'C'}$, $\widehat{C'A'}$, $\widehat{A'B'}$ (see Figure 1). The lines AA', BB', CC' being bisectors in the triangle $A'B'C'$ are concurrent in the center of the circle inscribed in this triangle, which will note H , and which, in conformity with Lemma 2 is the orthocenter of the triangle ABC . Let XYZ the Fuhrmann triangle of the triangle $A'B'C'$, in conformity with Lemma 1, the orthocenter of XYZ coincides with H the orthocenter of ABC , therefore with the center of the inscribed circle in the given triangle $A'B'C'$.

References

- [1] Fuhrmann W., *Synthetische Beweise Planimetrischer Satze*, Berlin (1890).
- [2] Stevanovic M., **Orthocentrer of Fuhrmann triangle**, Message Hyacinthos # du 20/09/2002.
- [3] Barbu Cătălin, **Teoreme fundamentale din geometria triunghiului**, Editura Unique, Bacău, Romania, 2008.

GREȘELI “LA LIMITĂ”

FLORIN ZGĂVÎRDICI⁸

Vom prezenta, în acest articol, o problemă aflată la intersecția celor trei domenii studiate în matematica de liceu: geometrie, algebră și analiza matematică. Aceasta problemă este publicată în [1]. Așa cum vom constata, soluția problemei amintite, conține erori, datorită utilizării insuficient de atent a unor noțiuni de geometrie, algebră, și, mai ales, de analiză matematică.

Problema 9438 ([1]). Fie $C(O;1)$ cercul unitate și $A_1A_2\dots A_n$ un poligon regulat înscris în acest cerc. Dacă $P \in C(O;1)$, să se

calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n PA_i^2}{\min \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{PA_i^2} \right)}$. (N. Stanciu)

„Soluția” autorului.

i) Dacă P este unul dintre vârfurile poligonului $A_1A_2\dots A_n$, atunci, fără a restrânge generalitatea presupunem că $P = A_1$. Se știe că:

$|A_1A_2|^2 + |A_1A_3|^2 + \dots + |A_1A_n|^2 = 2nR^2$. Cum $P = A_1$ și $R=1$, rezultă

$\sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = \sum_{k=2}^n |A_1A_k|^2 = 2n$ (1). Din inegalitatea mediilor rezultă:

$$(|A_1A_2|^2 + |A_1A_3|^2 + \dots + |A_1A_n|^2) \left(\frac{1}{|A_1A_2|^2} + \frac{1}{|A_1A_3|^2} + \dots + \frac{1}{|A_1A_n|^2} \right) \geq (n-1)^2,$$

⁸ Colegiul Național „Vasile Alecsandri” din Bacău

sau $\frac{1}{|A_1A_2|^2} + \frac{1}{|A_1A_3|^2} + \dots + \frac{1}{|A_1A_n|^2} \geq \frac{(n-1)^2}{2n}$, de unde obținem:

$$\min \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|PA_i|^2} \right) = \min \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{|A_1A_k|^2} \right) = \frac{(n-1)^2}{2n} \quad (2). \text{ Din relațiile (1) și}$$

(2) avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n |PA_i|^2}{\min \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|PA_i|^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\frac{(n-1)^2}{2n}} = 4.$$

ii) Dacă punctul P este diferit de vârfurile poligonului $A_1A_2\dots A_n$,

utilizând egalitatea $\sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = 2nR^2$ (3), obținem $\sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = 2n$ (4).

Din inegalitatea mediilor avem:

$$\left(|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \dots + |PA_n|^2 \right) \left(\frac{1}{|PA_1|^2} + \frac{1}{|PA_2|^2} + \dots + \frac{1}{|PA_n|^2} \right) \geq n^2,$$

sau $\sum_{i=1}^n \frac{1}{|PA_i|^2} \geq \frac{n^2}{2n}$, de unde rezultă că $\min \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|PA_i|^2} \right) = \frac{n}{2}$ (5). Din

(4) și (5) rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n |PA_i|^2}{\min \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|PA_i|^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\frac{n}{2}} = 4.$$

Deci pentru orice punct $P \in C(0;1)$ limita căutată este egală cu 4.

Comentarii la “soluție”: Încă din enunț constatăm că minimumul de la numitor este dintr-un număr adică este... el însuși, iar calculul limitei este... incorect, deoarece relațiile (2) și (5) nu rezultă din inegalitatea mediilor decât dacă segmentele amintite ar fi egale. Egalitatea acestor segmente este însă imposibilă... dacă mai mult de două astfel de segmente sunt egale rezultă că P este... centrul cercului. Totodată „cazul (i)” nu există deoarece dacă $P = A_1$, atunci

$PA_1^2 = 0$, deci nu există raportul $\frac{1}{PA_1^2}$. Semnalez probabila confuzie

între noțiunea de minim și cea de margine inferioară a unei submulțimi nevide a corpului total și complet ordonat $\mathbb{R}$. De fapt aceste sume sunt minorate și de sirul constant 0 sau de șirul -3. Cum ar arăta enunțul în aceste situații? În rest totul este...”adevarat”. Deoarece ne interesează fenomenul și nu autorul am expus cele de mai sus având convingerea că responsabilitatea cuvântului scris este obligatorie. Grijă trebuie să fie cu atât mai mare când “cuplăm” noțiuni din domenii diferite ale matematicii cu condiționări specifice, chiar dacă înțelegem matematica ca pe un domeniu “unitar”.

Referințe:

[1] * * *, *Revista de informare matematica din Brașov*, 10 (2005).