CONJECTURA LUI SMARANDACHE

OCTAVIAN CIRA

REZUMAT. Conjectura lui Smarandache afirmă că ecuaţia neliniară $p_{n+1}^x - p_n^x = 1$, unde p_n şi p_{n+1} sunt două numere prime consecutive, are soluţii $> \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

În acest articol stabilim condiţiile în care conjectura lui Smarandache este adevărată.

1. INTRODUCERE

Face notaţia $\mathbb{P}_{\geq k} = \{p \mid p \text{ număr prim}, \ p \geq k\}$. Fie $p_n, p_{n+1} \in \mathbb{P}_{\geq 2}$, două numere prime consecutive.

Conjectura lui Smarandache. *Ecuaţia*

$$p_{n+1}^x - p_n^x = 1 \ , \tag{1.1}$$

are soluţii $> \frac{1}{2}$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, [18, 25].

Numărul $c_S \approx 0.567148130202539\ldots$, soluţia ecuaţiei

$$127^x - 113^x = 1 \ ,$$

este *constanta lui Smarandache*, [18, 29].

Conjectura asupra constantei lui Smarandache. Constanta c_S este cea mai mică soluţie a ecuaţiei (1.1) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Funcţia de numărare a numerelor prime p, $p \leq x$, a fost notată de Edmund Landau în anul 1909, cu litera π, [10, 27]. Pentru apăstra tradiţia vom adopta şi noi această notaţie.

Se cunosc următoarele conjecturi şi teoreme referitoare distribuţia numerelor prime.

Conjectura lui Legendre, [8, 20]. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *există* p *număr prim astfel încât*

$$n^2 < p < (n+1)^2 \ .$$

The smallest primes between n^2 and $(n+1)^2$ for $n = 1, 2, \ldots$, are 2, 5, 11, 17, 29, 37, 53, 67, 83, ..., [24, A007491].

The largest primes between n^2 and $(n+1)^2$ for $n = 1, 2, \ldots$, are 3, 7, 13, 23, 31, 47, 61, 79, 97, ..., [24, A053001].

Date: 03 Oct. 2014.

The numbers of primes between n^2 and $(n+1)^2$ for $n = 1, 2, \ldots$ are given by 2, 2, 2, 3, 2, 4, 3, 4, $\ldots$, [24, A014085];

Teorema lui Bertrand. Pentru orice întreg n, $n > 3$, există întotdeauna un număr p prim, astfel încât $n < p < 2(n-1)$. Teorema a fost enunţată de Bertrand în 1845.

Această presupunere a fost demonstrată pentru prima dată de Chebyshev în anul 1850. Ramanujan în 1919 , în articolul [19], şi Erdös în 1932, [5], au publicat câte o demonstraţie simplă a acestei teoreme.

O altă formulare pentru teorema lui Bertrand este: *prentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există p, număr prim, astfel încât $n < p < 2n$.*

Hoheisel, în anul 1930, a demonstrat că există $\theta \in (0, 1)$, [9], astfel încât

$$\pi(x + x^\theta) - \pi(x) \approx \frac{x^\theta}{\ln(x)} \ . \tag{1.2}$$

Este de mare interes găsirea celui mai mic interval care conţine cel puţin un număr p prim. Unul din ultimele rezultate în această direcţie este a lui Andy Loo din 2011, [11]. El a demonstrat că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există întotdeauna un număr p prim astfel încât $3n < p < 4n$. Mai mult decât atât putem spune, de asemenea, că în cazul în care ipoteza lui Riemann

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln(u)} + O(\sqrt{x}\ln(x)) \ , \tag{1.3}$$

este adevărată, atunci în relaţia (1.2) putem lua $\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$, conform lui Maier [12].

Conjectura lui Brocard, [26, 17]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea*

$$\pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2) \geq 4$$

adevărată.

Conjectura lui Legendre afirmă că între p_n^2 şi a^2, unde $a \in (p_n, p_{n+1})$, există cel puţin două numere prime şi că între a^2 şi p_{n+1}^2 există, de asemenea, cel puţin două numere prime. Cu alte cuvinte, dacă conjectura lui Legendre este adevărat, atunci există cel puţin patru numere prime între p_n^2 şi p_{n+1}^2.

În consecinţă, în cazul în care conjectura lui Legendre este adevărată, atunci şi conjectura Brocard este, de asemenea, adevărată.

Conjectura lui Andrica, [1, 17, 13]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea*

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1 \ , \tag{1.4}$$

adevărată. Relaţia (1.4) este echivalentă cu inegalitatea

$$\sqrt{p_n + g_n} < \sqrt{p_n} + 1 \ , \tag{1.5}$$

unde s-a făcut notaţia $g_n = p_{n+1} - p_n$ a gap-ului dintre p_{n+1} şi p_n. Dacă ridicăm la pătrat relaţia (1.5) rezultă relaţia echivalentă

$$g_n < 2\sqrt{p_n} + 1 \ . \tag{1.6}$$

Prin urmare avem forma echivalentă a conjecturii lui Andrica: *pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ inegalitatea* (1.6) *este adevărată*.

Paz în 2014, [17], a demonstrat că dacă conjectura lui Legendre este adevărată atunci şi conjectura Andrica este adevărată. Conjectura lui Smarandache generalizează conjectura lui Andrica, [25].

Conjectura lui Cramér [4, 23, 7, 21]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem relaţia*

$$g_n = O(\ln(p_n)^2) \ , \tag{1.7}$$

unde $g_n = p_{n+1} - p_n$, sau altfel spus

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{g_n}{\ln(p_n)^2} = 1 \ .$$

Cramér a dat o demonstraţie pentru relaţia

$$g_n = O\big(\sqrt{p_n}\ln(p_n)\big) \ ,$$

relaţie mult mai slabă ca relaţia (1.7), presupunând adevărată ipoteza lui Riemann (1.3).

Westzynthius a dovedit în 1931 că gap-urile g_n cresc mai repede decât logaritmul numerelor prime, [30], adică avem

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{g_n}{\ln(p_n)} = \infty \ .$$

Conjectura lui Cramér-Granville. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea

$$g_n < R \cdot \ln(p_n)^2 \ , \tag{1.8}$$

adevărată pentru $R > 1$, unde $g_n = p_{n+1} - p_n$.

Granville prin teorema lui Maier arată că inegalitatea lui Cramér (1.8) nu descrie în mod adecvat distribuţia numerelor prime. Granville propune $R = 2e^{-\gamma} \approx 1.123\ldots$ luând în considerare numerele prime mici, [6, 13] $\big($prin numere prime mici, în general, se înţelege numere prime $p < 10^6$, [3]$\big)$.

Nicely a studiat valabilitatea conjecturii lui Cramér-Grandville, prin calcularea raportului

$$R = \frac{\ln(p_n)}{\sqrt{g_n}} \ ,$$

folosind gap-uri mari. El a constatat că pentru aceste gap-uri avem aproximaţia $R \approx 1.13\ldots$. Deoarece $1/R^2 < 1$, cu ajutorul raportului R nu putem obţine o justificare pentru conjectura lui Cramér-Granville, [14].

Conjectura lui Oppermann, [16, 17]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, în intervalele*

$$[n^2 - n + 1, n^2 - 1] \text{ şi } [n^2 + 1, n^2 + n]$$

există cel puţin un număr p prim.

Conjectura lui Firoozbakht. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegaliatatea

$$\sqrt[n+1]{p_{n+1}} < \sqrt[n]{p_n} \tag{1.9}$$

sau forma ei echivalentă

$$p_{n+1} < p_n^{1+\frac{1}{n}} \ .$$

Dacă conjectura lui Firoozbakht este adevărată, atunci pentru orice $n > 4$ avem inegalitatea

$$g_n < \ln(p_n)^2 - \ln(p_n) \ , \tag{1.10}$$

adevărată, unde $g_n = p_{n+1} - p_n$. În anul 1982 Firoozbakht a verificat inegalitatea (1.10) folosind gap-urilor maximale până la 4.444×10^{12}, [22], adică până în apropierea poziţiei 48 din Tabelul 1.

Până la data scrierii articolului această tabelă a ajuns până la gap-ul maximal cu numărul de ordine 75, [15, 24].

Conjectura lui Paz, [17]. Dacă are loc conjectura lui Legendre atunci:

(1) Intervalul $[n, n+2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1]$ conţine cel puţin un număr p prim pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
(2) Intervalul $[n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1, n]$ sau $[n, n + \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1]$ conţin cel puţin un număr p prim, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$.

Remarca 1.1. According to Cases (1) and (2), if Conjecture Legendre is true, then Andrica's conjectureis also true, [17].

Conjecture Wolf. Furthermore, the bounds presented below suggest yet another growth rate, namely, that of the square of the so-called *Lambert W function*. These growth rates differ by very slowly growing factors $\big($like $ln(ln(p_n))\big)$. Much more data is needed to verify empirically which one is closer to the true growth rate.

Let $P(g)$ be the least prime such that $P(g)+g$ is the smallest prime larger than $P(g)$. The values of $P(g)$ are bounded, for our empirical data, by the functions

$$P_{min}(g) = 0.12 \cdot \sqrt{g} \cdot e^{\sqrt{g}} \ ,$$
$$P_{max}(g) = 30.83 \cdot \sqrt{g} \cdot e^{\sqrt{g}} \ .$$

For large g, there bounds are in accord with a conjecture of Marek Wolf [15, 32, 31].

2. DEMONSTRAŢIA CONJECTURII LUI SMARANDACHE

În acest articol demonstrăm că nu există ecuaţii, în raport cu x, de tipul (1.1), cu soluţii $\le \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (p+g)^x - p^x - 1 \ , \tag{2.1}$$

unde $p \in \mathbb{P}_{\ge 3}$, $g \in \mathbb{N}^*$ şi g este gap-ul dintre p şi numărul prim consecutiv $p+g$. Astfel avem ecuaţia echivalentă cu ecuaţia (1.1)

$$(p+g)^x - p^x = 1 \ . \tag{2.2}$$

După cum bine se ştie pentru $p \in \mathbb{P}_{\ge 3}$ avem $g \ge 2$ (dacă *conjectura lui Goldbach* este adevărată, atunci $g = 2 \cdot \mathbb{N}^*$[1]).

Teorema 2.1. *Funcţia f dată de* (2.1) *este strict crescătoare şi convexă pe domeniul de definiţie.*

Demonstraţie. Calculăm derivata întâi şi derivata a doua a funcţiei f

$$f'(x) = \ln(p+g)(p+g)^x - \ln(p)p^x$$

şi

$$f''(x) = \ln(p+g)^2(p+g)^x - \ln(p)^2 p^x \ .$$

Atunci rezultă că $f'(x) > 0$ şi $f''(x) > 0$ pe intervalul $[0,1]$ deci prin urmare funcţia f este strict crescătoare şi convexă pe domeniul de definiţie. □

Corolarul 2.2. *Deoarece $f(0) = -1 < 0$ şi $f(1) = g - 1 > 0$ pentru că $g \ge 2$ dacă $p \in \mathbb{P}_{\ge 3}$ şi deoarece funcţia f este strict monoton crescătoare rezultă că ecuaţia* (2.2) *are o unică soluţie în intervalul* $(0,1)$.

[1] $2 \cdot \mathbb{N}^*$ este mulţimea numerelor naturale pare

Teorema 2.3. *Pentru funcţia* (2.1) *avem* $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, *pentru orice* g *care îndeplineşte condiţia* $2 \le g < 2\sqrt{p} + 1$.

Demonstraţie. Inecuaţia $\sqrt{p+g} - \sqrt{p} - 1 < 0$ în raport cu g are soluţia $-p \le g < 2\sqrt{p} + 1$. Având în vedere condiţiile date rezultă că pentru g care îndeplineşte condiţiile $2 \le g < 2\sqrt{p} + 1$ avem $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\ge 3}$. $\square$

Remarca 2.4. Condiţia ca $g < 2\sqrt{p}+1$ este conjectura lui Andrica (1.6).

Teorema 2.5. *Fie* $p \in \mathbb{P}_{\ge 3}$ *şi* $g \in \mathbb{N}^*$, *atunci ecuaţia* (2.2) *are o soluţie* s *mai mare ca soluţia* s_ε *a ecuaţiei* $(p+g+\varepsilon)^x - p^x - 1 = 0$, *pentru orice* $\varepsilon > 0$.

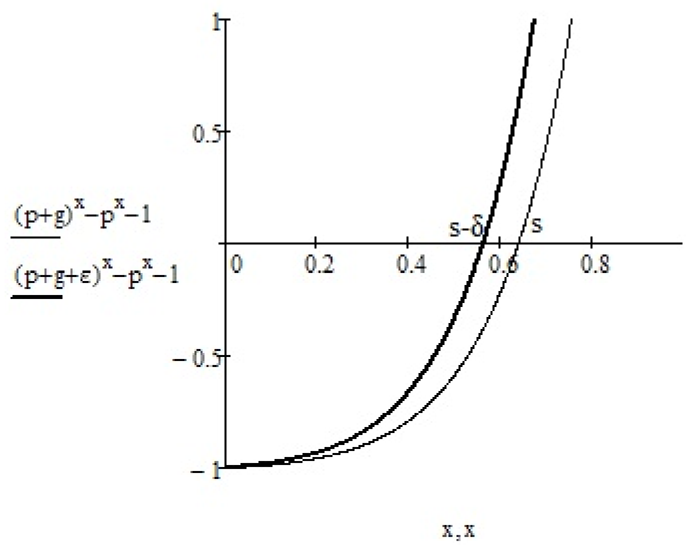

FIGURA 1. Funcţiile $(p+g)^x - p^x - 1$ şi $(p+g+\varepsilon)^x - p^x - 1$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$, atunci $p+g+\varepsilon > p+g$, de unde rezultă că $(p+g+\varepsilon)^x - p^x - 1 > (p+g)^x - p^x - 1$, pentru orice $x \in [0,1]$. Fie s soluţia ecuaţiei (2.2), atunci există $\delta > 0$, ce depinde de ε, astfel încât $(p+g+\varepsilon)^{s-\delta} - p^{s-\delta} - 1 = 0$. Prin urmare soluţia s, a ecuaţiei (2.2), este mai mare ca soluţia $s_\varepsilon = s - \delta$ a ecuaţiei $(p+g+\varepsilon)^x - p^x - 1 = 0$, vezi Figura 1. $\square$

Fie funcţiile:

- $g_A(p) = 2\sqrt{p} + 1$, funcţia gap a lui Andrica ,
- $g_{CG}(p) = 2 \cdot e^{-\gamma} \cdot \ln(p)^2$, funcţia gap a lui Cramér-Grandville ,
- $g_F(p) = g_1(p) = \ln(p)^2 - \ln(p)$, funcţia gap a lui Firoozbakht ,

- $g_c(p) = \ln(p)^2 - c \cdot \ln(p)$, unde $c = 4(2\ln(2) - 1) \approx 1.545\ldots$,
- $g_b(p) = \ln(p)^2 - b \cdot \ln(p)$, unde $b = 6(2\ln(2) - 1) \approx 2.318\ldots$.

Teorema 2.6. *Inegalitatea $g_A(p) > g_\alpha(p)$ este adevărată pentru:*

(1) $\alpha = 1$ *şi* $p \in \mathbb{P}_{\geq 3} \setminus \{7, 11, \ldots, 41\}$;
(2) $\alpha = c = 4(2\ln(2) - 1)$ *şi* $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$;
(3) $\alpha = b = 6(2\ln(2) - 1)$ *şi* $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ *şi funcţia* g_A *are creşterea cea mai rapidă faţă de funcţia* g_b.

Demonstraţie. Fie funcţia

$$d_\alpha(p) = g_A(p) - g_\alpha(p) = 1 + 2\sqrt{p} + \alpha \cdot \ln(p) - \ln(p)^2$$

Derivata funcţiei d_α este

$$d_\alpha{}'(p) = \frac{\alpha - 2\ln(p) + \sqrt{p}}{p} .$$

Funcţia $d_1{}'$ se anulează în valorile $5.099\ldots$ şi $41.816\ldots$ şi $d_1{}'(p) < 0$ pentru $\{7, 11, \ldots, 41\}$ şi $d_1{}'(p) > 0$ pentru $p \in \mathbb{P}_{\geq 3} \setminus \{7, 11, \ldots, 41\}$, de

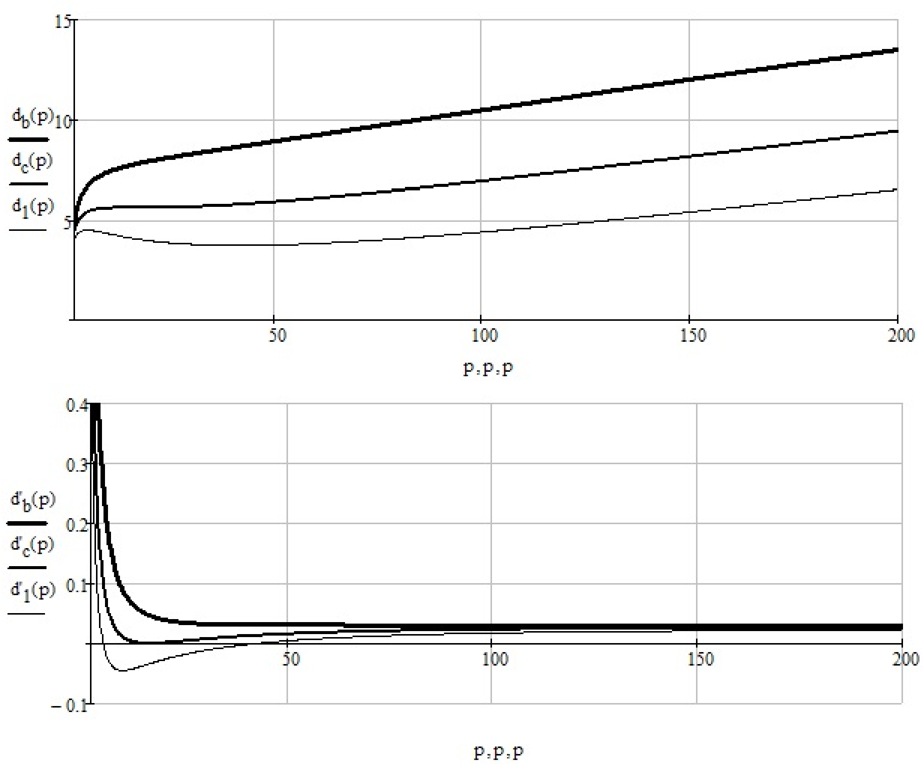

FIGURA 2. Funcţiile d_α şi d'_α

aceea funcţia d_1 este strict crescătoare doar pe mulţimea $p \in \mathbb{P}_{\geq 3} \setminus \{7, 11, \ldots, 41\}$ (vezi Figura 2).

Pentru $\alpha = c = 4(2\ln(2) - 1) \approx 1.5451774444795623\ldots$, $d'_c(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, (funcţia d'_c se anulează pentru $p = 16$, dar $16 \notin \mathbb{P}_{\geq 3}$), atunci funcţia d_c este strict crescătoare pentru $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ (vezi Figura 2). Deoarece funcţia d_c este strict crescătoare şi $d_c(3) = \ln(3)\big(8\ln(2) - 4 - \ln(3)\big) + 2\sqrt{3} + 1 \approx 4.954\ldots$, rezultă că $d_c(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$.

În $\alpha = b = 6(2\ln(2) - 1) \approx 2.3177661667193434\ldots$, funcţia d_b are creşterea cea mai rapidă pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ (pentru că $d'_b(p) > d'_\alpha(p)$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq b$). Deoarece ${d_b}'(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi deoarece

$$\begin{aligned} d_b(3) = \ln(3)\big(12\ln(2) - 6 - \ln(3)\big) + 2\sqrt{3} + 1 \\ \approx 5.803479047342222\ldots\,. \end{aligned}$$

rezultă că $d_b(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ (vezi Figura 2). □

Remarca 2.7. Pentru determinarea lui c, rezolvăm ecuaţia $d'_\alpha(p) = 0$ în raport cu α. Soluţia α în funcţie de p este $\alpha(p) = 2\ln(p) - \sqrt{p}$. Determinăm pe p astfel încât $\alpha'(p) = \frac{4-\sqrt{p}}{2p}$ să se anuleze. Atunci rezultă că $c = \alpha(16) = 4(2\ln(2) - 1)$.

Remarca 2.8. Pentru determinarea lui b, rezolvăm ecuaţia $d''_\alpha(p) = 0$ în raport cu α. Soluţia α în funcţie de p este $\alpha(p) = 2\ln(p) - \frac{\sqrt{p}}{2} - 2$. Determinăm pe p astfel încât $\alpha'(p) = \frac{8-\sqrt{p}}{4p}$ să se anuleze. Atunci rezultă că $b = \alpha(8) = 6(2\ln(2) - 1)$.

Faptul că funcţia d_b are creşterea cea mai rapidă este echivalent cu faptul că creşterea funcţie g_A este cea mai rapidă faţă de creşterea funcţiei g_b.

Fie funcţia $h(p, g) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{p + g} - \sqrt{p} - 1$.

Teorema 2.9. *Pentru funcţia*

$$h_{CG}(p) = h(p, g_{CG}(p)) = \sqrt{p + 2e^{-\gamma}\ln(p)^2} - \sqrt{p} - 1$$

avem $h_{CG}(p) < 0$ *pentru* $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17\} \cup \{359, 367, \ldots\}$ *şi*

$$\lim_{p \to \infty} h_{CG}(p) = -1\ .$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei rezultă prin calcul direct. Vezi graficul din Figura 3. □

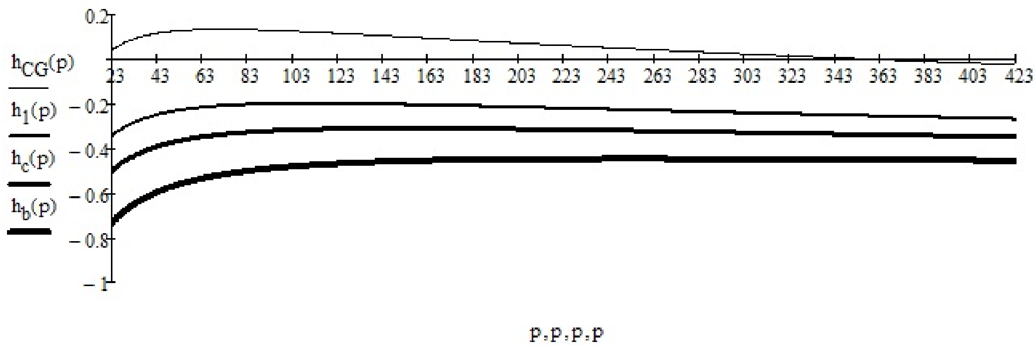

FIGURA 3. Graficele funcţiilor h_b, h_c, h_F şi h_{CG}

Teorema 2.10. *Pentru funcţia*

$$h_F(p) = h_1(p) = h(p, g_F(p)) = \sqrt{p + \ln(p)^2 - \ln(p)} - \sqrt{p} - 1$$

avem maximul funcţiei în $p = 111.152\ldots$ *şi* $h_F(109) = -0.201205\ldots$ *iar* $h_F(113) = -0.201199\ldots$ *şi*

$$\lim_{p\to\infty} h_F(p) = -1\ .$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei rezultă prin calcul direct. Vezi graficul din Figura 3. □

Teorema 2.11. *Pentru funcţia*

$$h_c(p) = h(p, g_c(p)) = \sqrt{p + \ln(p)^2 - c\ln(p)} - \sqrt{p} - 1$$

avem maximul funcţiei în $p = 152.134\ldots$ *şi* $h_c(151) = -0.3105\ldots$ *iar* $h_c(157) = -0.3105\ldots$ *şi*

$$\lim_{p\to\infty} h_c(p) = -1\ .$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei rezultă prin calcul direct. Vezi graficul din Figura 3. □

Teorema 2.12. *Pentru funcţia*

$$h_B(p) = h(p, g_B(p)) = \sqrt{\ln(p)^2 - b\ln(p) + p} - \sqrt{p} - 1$$

avem maximul funcţiei în $p = 253.375\ldots$ *şi* $h_B(251) = -0.45017\ldots$ *iar* $h_B(257) = -0.45018\ldots$ *şi*

$$\lim_{p\to\infty} h_B(p) = -1\ .$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei rezultă prin calcul direct într-un soft matematic. Vezi graficul din Figura 3. □

Tabela 1: a gap-urilor maximale, [24, 14, 15]

#	n	p_n	g_n
1	1	2	1
2	2	3	2
3	4	7	4
4	9	23	6
5	24	89	8
6	30	113	14
7	99	523	18
8	154	887	20
9	189	1129	22
10	217	1327	34
11	1183	9551	36
12	1831	15683	44
13	2225	19609	52
14	3385	31397	72
15	14357	155921	86
16	30802	360653	96
17	31545	370261	112
18	40933	492113	114
19	103520	1349533	118
20	104071	1357201	132
21	149689	2010733	148
22	325852	4652353	154
23	1094421	17051707	180
24	1319945	20831323	210
25	2850174	47326693	220
26	6957876	122164747	222
27	10539432	189695659	234
28	10655462	191912783	248
29	20684332	387096133	250
30	23163298	436273009	282
31	64955634	1294268491	288
32	72507380	1453168141	292
33	112228683	2300942549	320
34	182837804	3842610773	336
35	203615628	4302407359	354
36	486570087	10726904659	382
37	910774004	20678048297	384

#	n	p_n	g_n
38	981765347	22367084959	394
39	1094330259	25056082087	456
40	1820471368	42652618343	464
41	5217031687	127976334671	468
42	7322882472	182226896239	474
43	9583057667	241160624143	486
44	11723859927	297501075799	490
45	11945986786	303371455241	500
46	11992433550	304599508537	514
47	16202238656	416608695821	516
48	17883926781	461690510011	532
49	23541455083	614487453523	534
50	28106444830	738832927927	540
51	50070452577	1346294310749	582
52	52302956123	1408695493609	588
53	72178455400	1968188556461	602
54	94906079600	2614941710599	652
55	251265078335	7177162611713	674
56	473258870471	13829048559701	716
57	662221289043	19581334192423	766
58	1411461642343	42842283925351	778
59	2921439731020	90874329411493	804
60	5394763455325	171231342420521	806
61	6822667965940	218209405436543	906
62	35315870460455	1189459969825483	916
63	49573167413483	1686994940955803	924
64	49749629143526	1693182318746371	1132
65	1175661926421598	43841547845541059	1184
66	1475067052906945	55350776431903243	1198
67	2133658100875638	80873624627234849	1220
68	5253374014230870	203986478517455989	1224
69	5605544222945291	218034721194214273	1248
70	7784313111002702	305405826521087869	1272
71	8952449214971382	352521223451364323	1328
72	10160960128667332	401429925999153707	1356
73	10570355884548334	418032645936712127	1370
74	20004097201301079	804212830686677669	1442
75	34952141021660495	1425172824437699411	1476

Notăm cu $a_n = \lfloor g_A(p_n) \rfloor$ (Andrica conjecture), cu $cg_n = \lfloor g_{CG}(p_n) \rfloor$ (Cramér-Grandville conjecture) cu $f_n = \lfloor g_F(p_n) \rfloor$ (Firoozbakht conjecture), cu $c_n = \lfloor g_c(p_n) \rfloor$ şi $b_n = \lfloor g_b(p_n) \rfloor$.

Prezentăm în Tabelul 2 valorile a_n, cg_n, f_n, c_n, b_n şi g_n a gapurile maximale, [14, 2, 28, 15]. Tabelul 2 confirmă conjecturile Cramér-Grandville şi Firoozbakht de la $n \geq 9$ (de la $p_9 = 23$, cel ce ocupă poziţia a patra în tabela *gap-urilor maximale*).

Tabela 2: a aproximaţiilor gap-urilor maximale

#	a_n	cg_n	f_n	c_n	b_n	g_n
1	3	0	-1	-1	-2	1
2	4	1	0	-1	-2	2
3	6	4	1	0	-1	4
4	10	11	6	4	2	6
5	19	22	15	13	9	8
6	22	25	17	15	11	14
7	46	43	32	29	24	18
8	60	51	39	35	30	20
9	68	55	42	38	33	22
10	73	58	44	40	35	34
11	196	94	74	69	62	36
12	251	104	83	78	70	44
13	281	109	87	82	74	52
14	355	120	96	91	83	72
15	790	160	131	123	115	86
16	1202	183	150	143	134	96
17	1217	184	151	144	134	112
18	1404	192	158	151	141	114
19	2324	223	185	177	166	118
20	2330	223	185	177	166	132
21	2837	236	196	188	177	148
22	4314	264	220	211	200	154
23	8259	311	260	251	238	180
24	9129	318	267	257	244	210
25	13759	350	294	285	271	220
26	22106	389	328	317	303	222
27	27547	407	344	333	319	234
28	27707	408	344	334	319	248

#	a_n	cg_n	f_n	c_n	b_n	g_n
29	39350	439	371	360	345	250
30	41775	444	375	365	349	282
31	71952	494	419	407	391	288
32	76241	499	423	412	396	292
33	95937	521	443	431	414	320
34	123978	546	464	452	435	336
35	131186	552	469	457	440	354
36	207142	598	510	497	479	382
37	287598	633	540	527	509	384
38	299113	637	544	531	512	394
39	316583	643	549	536	517	456
40	413051	672	574	561	542	464
41	715476	734	628	614	594	468
42	853761	754	646	632	612	474
43	982163	771	660	646	626	486
44	1090874	783	671	657	636	490
45	1101584	784	672	658	637	500
46	1103811	785	672	658	637	514
47	1290905	803	689	674	653	516
48	1358957	810	694	679	659	532
49	1567786	827	709	694	673	534
50	1719108	838	719	704	683	540
51	2320599	875	752	736	715	582
52	2373770	878	754	739	717	588
53	2805843	899	773	757	735	602
54	3234157	918	788	773	751	652
55	5358046	983	846	830	807	674
56	7437486	1028	885	868	845	716
57	8850161	1051	906	889	865	766
58	13090804	1106	953	936	912	778
59	19065606	1159	1000	983	958	804
60	26171079	1206	1041	1023	998	806
61	29543826	1224	1057	1039	1013	906
62	68977097	1353	1170	1151	1124	916
63	82146088	1380	1194	1175	1148	924
64	82296594	1380	1194	1175	1148	1132
65	418767467	1648	1430	1409	1379	1184
66	470534915	1668	1447	1426	1396	1198
67	568765768	1701	1476	1455	1425	1220

#	a_n	cg_n	f_n	c_n	b_n	g_n
68	903297246	1783	1548	1526	1496	1224
69	933883765	1789	1553	1532	1501	1248
70	1105270694	1820	1580	1558	1527	1272
71	1187469955	1833	1592	1570	1538	1328
72	1267169959	1844	1602	1580	1549	1356
73	1293108884	1848	1605	1583	1552	1370
74	1793558286	1908	1658	1636	1604	1442
75	2387612050	1962	1705	1682	1650	1476

Tabelul 2 şi graficele 4 şi 5 verifică ipoteza că

$$g_n = p_{n+1} - p_n < \ln(p_n)^2 - c \cdot \ln(p_n) \ , \tag{2.3}$$

pentru $p \in \{89, 113, \ldots, 1425172824437699411\}$.

Aceste confirmări ale inecuaţiei (2.3) ne permite să considerăm următoarea ipoteză.

Conjectura 2.1. *Relaţia* (2.3) *pentru* $\alpha = c$ *este adevărată pentru orice număr prim* p_n*, cu* $n \geq 10$*, adică* $p_n \in \mathbb{P}_{\geq 29}$.

Fie funcţiile $g_\alpha : \mathbb{P}_{\geq 3} \to \mathbb{R}_+$,

$$g_\alpha(p) = \ln(p)^2 - \alpha \cdot \ln(p)$$

şi $h_\alpha : \mathbb{P}_{\geq 3} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, cu p fixat,

$$h_\alpha(p, x) = (p + g_\alpha(p))^x - p^x - 1$$

care, conform teoremei 2.1, este strict crescătoare şi convexă pe domeniul de definiţie, iar conform corolarului 2.2 are o singură soluţie în intervalul $[0, 1]$.

În locul ecuaţiei (2.2) vom rezolva ecuaţia

$$h_c(p, x) = \big(p + \ln(p)^2 - c\ln(p)\big)^x - p^x - 1 = 0 \ , \tag{2.4}$$

în raport cu necunoscuta x, pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 29}$. Conform teoremei 2.5 soluţia ecuaţiei (2.2) este mai mare ca soluţia ecuaţiei (2.4). Prin urmare dacă demonstrăm că soluţiile ecuaţiei (2.4) sunt mai mari ca $\frac{1}{2}$ atunci cu atât mai mult soluţiile ecuaţiei (2.2) sunt mai mari ca $\frac{1}{2}$.

Pentru ecuaţia $h_\alpha(p, x) = 0$ considerăm metoda secantei, cu iteraţiile iniţiale x_0 şi x_1 (vezi Figura 6). Iteraţia x_2 este dată de formula

$$x_2 = \frac{x_1 \cdot h_\alpha(p, x_0) - x_0 \cdot h_\alpha(p, x_1)}{h_\alpha(p, x_1) - h_\alpha(p, x_0)} \ . \tag{2.5}$$

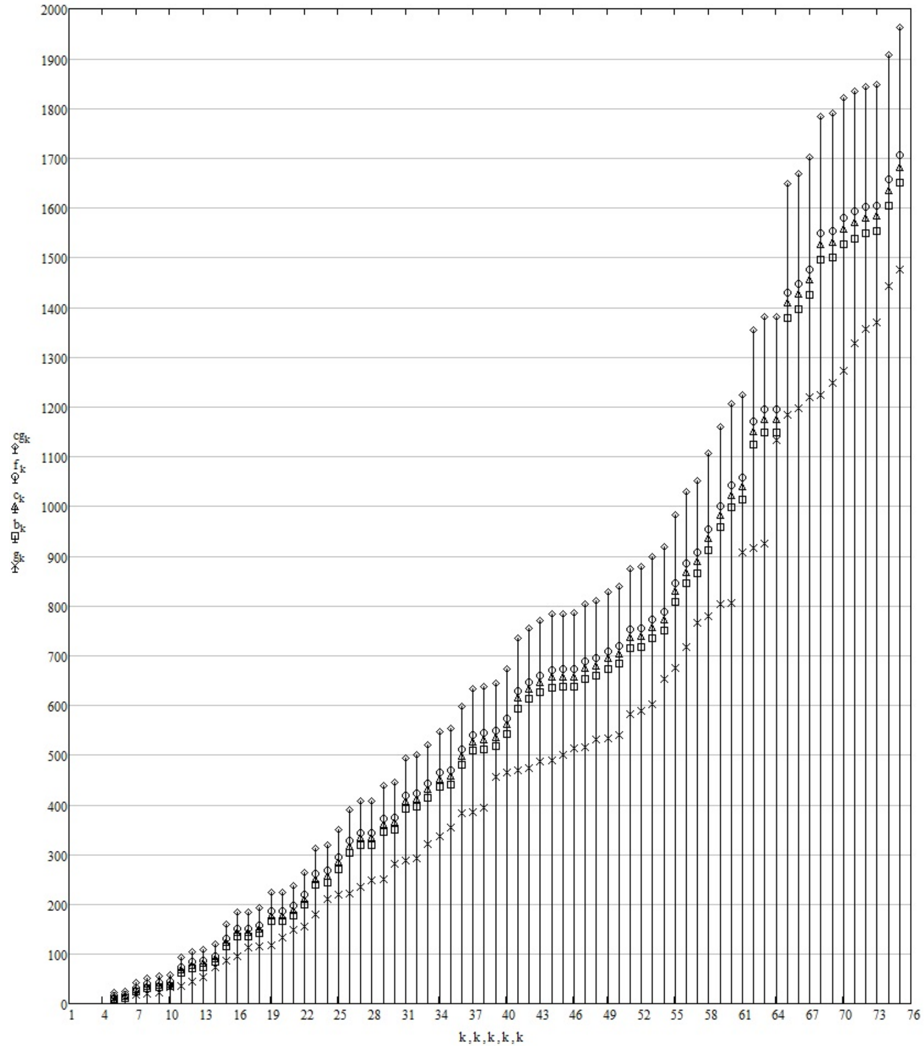

FIGURA 4. Graficul aproximării gapurilor maximale

Dacă conjectura lui Andrica, $\sqrt{p+g} - \sqrt{p} - 1 < 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, $g \in \mathbb{N}^*$ şi $p > g \geq 2$, este adevărată, atunci $h_\alpha(p, \frac{1}{2}) < 0$ (conform Remarca 1.1 dacă conjectura lui Legendre este adevărată atunci şi conjectura lui Andrica este adevărată), iar $h_\alpha(p, 1) > 0$. Deoarece funcţia $h_\alpha(p, \cdot)$ este strict crescătoare şi convexă iteraţia x_2 **aproximează prin lipsă soluţia ecuaţiei** $h_\alpha(p, x) = 0$, (în raport cu x). După calcule simple avem că funcţia a care aproximează soluţia x_2 în funcţie de h_α, p, x_0 şi x_1 este:

$$a(p, h_\alpha, x_0, x_1) = \frac{x_1 \cdot h_\alpha(p, x_0) - x_0 h - \alpha(p, x_1)}{h_\alpha(p, x_1) - h_\alpha(p, x_0)} \ . \tag{2.6}$$

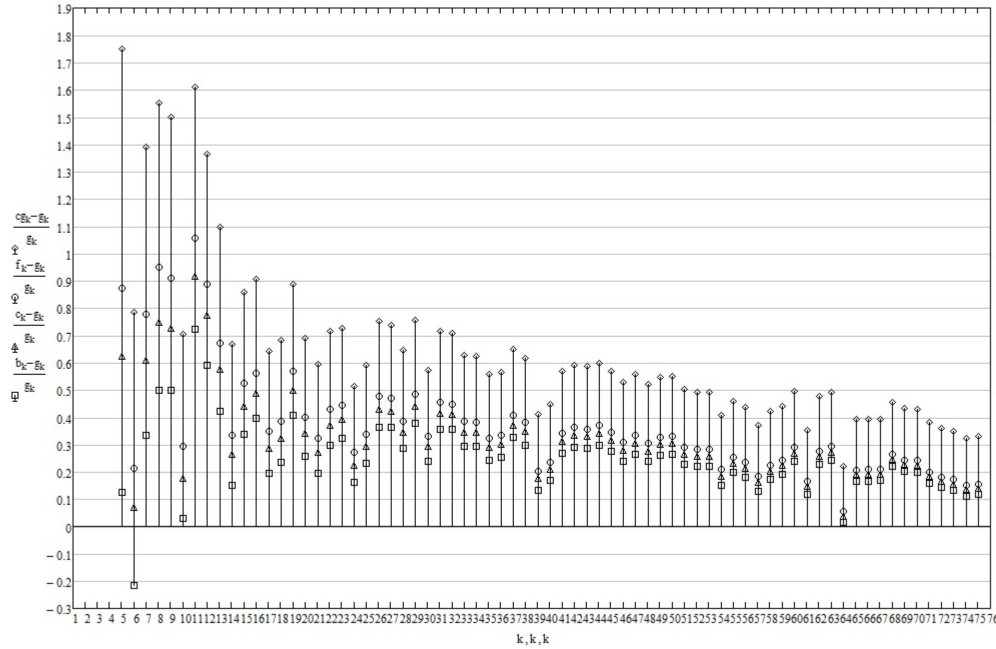

FIGURA 5. Erorile relative ale cg, f, c şi b raportate la g

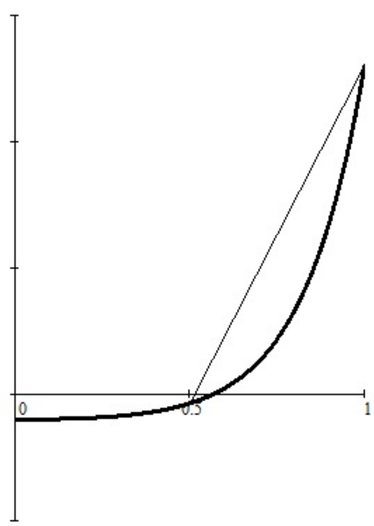

FIGURA 6. Funcţia f şi metoda secantei

Considerăm funcţia $a_\alpha(p) = a(p, h_\alpha, \frac{1}{2}, 1)$, atunci avem

$$a_\alpha(p) = \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{p} - \sqrt{\ln(p)^2 - \alpha \ln(p) + p}}{2\big(\ln(p)^2 - \alpha \ln(p) + \sqrt{p} - \sqrt{\ln(p)^2 - \alpha \ln(p) + p}\big)} \,. \tag{2.7}$$

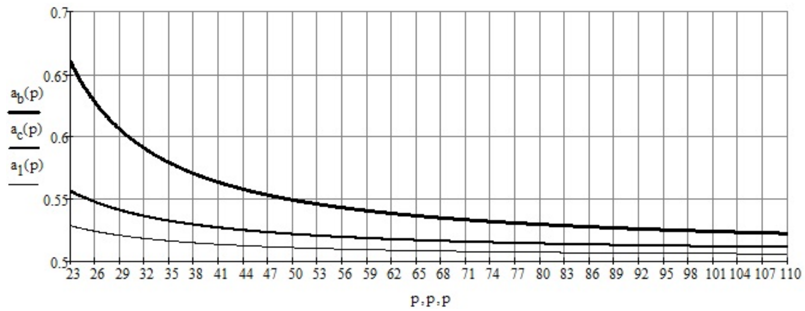

FIGURA 7. Graficul funcţiilor a_b, a_c şi a_1

Teorema 2.13. *Funcţia* $a_c(p)$ *care aproximează prin lipsă soluţia ecuaţiei* (2.4) *are valori în segmentul deschis* $(\frac{1}{2}, 1)$ *pentru orice* $p \in \mathbb{P}_{\geq 29}$.

Demonstraţie. Conform teoremei 2.6 pentru $\alpha = c = 4(2\ln(2) - 1)$ avem $\ln(p)^2 - c \cdot \ln(p) < 2\sqrt{p} + 1$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 29}$.

Funcţia a_c se poate scrie sub forma

$$a_c(p) = \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{p} - \sqrt{p+c}}{2\big(c + \sqrt{p} - \sqrt{p+c}\big)} \ .$$

după o analiză elementară rezultă că

$$\frac{1 + \sqrt{p} - \sqrt{p+c}}{2\big(c + \sqrt{p} - \sqrt{p+c}\big)} > 0 \ ,$$

de unde rezultă că $a_c(p) > \frac{1}{2}$ pentru $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ (vezi Figura 7) şi avem

$$\lim_{p \to \infty} a_c(p) = \frac{1}{2} \ .$$

□

Pentru $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ şi gap-uri corespunzătoare rezolvăm ecuaţiile (2.2).

$$\begin{array}{ll}
(2+1)^x - 2^x = 1 \ , & s = 1 \\
(3+2)^x - 3^x = 1 \ , & s = 0.7271597432435757\ldots \\
(5+2)^x - 5^x = 1 \ , & s = 0.7632032096058607\ldots \\
(7+4)^x - 7^x = 1 \ , & s = 0.5996694211239202\ldots \\
(11+2)^x - 11^x = 1 \ , & s = 0.8071623463868518\ldots \\
(13+4)^x - 13^x = 1 \ , & s = 0.6478551304201904\ldots \\
(17+2)^x - 17^x = 1 \ , & s = 0.8262031187421179\ldots \\
(19+4)^x - 19^x = 1 \ , & s = 0.6740197879899883\ldots \\
(23+6)^x - 23^x = 1 \ , & s = 0.6042842019286720\ldots \ .
\end{array} \tag{2.8}$$

Corolarul 2.14. *S-a demonstrat că aproximaţiile prin adaos ale soluţiilor ecuaţiei* (2.4) *sunt* $> \frac{1}{2}$ *pentru orice* $n \geq 10$*, atunci soluţiile ecuaţiei* (2.2) *sunt* $> \frac{1}{2}$ *pentru orice* $n \geq 10$*. Dacă luăm în considerare şi cazurile de excepţie* (2.8) *putem spune că ecuaţia* (1.1) *are soluţia* $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

3. Constanta lui Smarandache

Soluţiile ecuaţiei (2.2) ordonate crescător folosind Tabelul 1 a gapurilor maximale.

Tabela 3: a soluţiilor ecuaţiei (2.2)

p	g	soluţia ecuaţiei (2.2)
113	14	0.5671481305206224…
1327	34	0.5849080865740931…
7	4	0.5996694211239202…
23	6	0.6042842019286720…
523	18	0.6165497314215637…
1129	22	0.6271418980644412…
887	20	0.6278476315319166…
31397	72	0.6314206007048127…
89	8	0.6397424613256825…
19609	52	0.6446915279533268…
15683	44	0.6525193297681189…
9551	36	0.6551846556887808…
155921	86	0.6619804741301879…
370261	112	0.6639444999972240…
492113	114	0.6692774164975257…
360653	96	0.6741127001176469…
1357201	132	0.6813839139412406…
2010733	148	0.6820613370357171…
1349533	118	0.6884662952427394…
4652353	154	0.6955672852207547…
20831323	210	0.7035651178160084…
17051707	180	0.7088121412466053…
47326693	220	0.7138744163020114…
122164747	222	0.7269826061830018…
3	2	0.7271597432435757…
191912783	248	0.7275969819805509…
189695659	234	0.7302859105830866…

p	g	soluţia ecuaţiei (2.2)
436273009	282	0.7320752818323865...
387096133	250	0.7362578381533295...
1294268491	288	0.7441766589716590...
1453168141	292	0.7448821415605216...
2300942549	320	0.7460035467176455...
4302407359	354	0.7484690049408947...
3842610773	336	0.7494840618593505...
10726904659	382	0.7547601234459729...
25056082087	456	0.7559861641728429...
42652618343	464	0.7603441937898209...
22367084959	394	0.7606955951728551...
20678048297	384	0.7609716068556747...
127976334671	468	0.7698203623795380...
182226896239	474	0.7723403816143177...
304599508537	514	0.7736363009251175...
241160624143	486	0.7737508697071668...
303371455241	500	0.7745991865337681...
297501075799	490	0.7751693424982924...
461690510011	532	0.7757580339651479...
416608695821	516	0.7760253389165942...
614487453523	534	0.7778809828805762...
1408695493609	588	0.7808871027951452...
1346294310749	582	0.7808983645683428...
2614941710599	652	0.7819658004744228...
1968188556461	602	0.7825687226257725...
7177162611713	674	0.7880214782837229...
13829048559701	716	0.7905146362137986...
19581334192423	766	0.7906829063252424...
42842283925351	778	0.7952277512573828...
90874329411493	804	0.7988558653770882...
218209405436543	906	0.8005126614171458...
171231342420521	806	0.8025304565279002...
1693182318746371	1132	0.8056470803187964...
1189459969825483	916	0.8096231085041140...
1686994940955803	924	0.8112057874892308...
43841547845541060	1184	0.8205327998695296...
55350776431903240	1198	0.8212591131062218...
80873624627234850	1220	0.8224041089823987...
218034721194214270	1248	0.8258811322716928...

p	g	soluţia ecuaţiei (2.2)
352521223451364350	1328	0.8264955008480679...
1425172824437699300	1476	0.8267652954810718...
305405826521087900	1272	0.8270541728027422...
203986478517456000	1224	0.8271121951019150...
418032645936712100	1370	0.8272229385637846...
401429925999153700	1356	0.8272389079572986...
804212830686677600	1442	0.8288714147741382...
2	1	1

4. CONCLUZII

Prin urmare dacă conjectura lui Legendre este adevărată atunci şi conjectura lui Andrica este adevărată conform lui Paz [17]. Conjectura lui Andrica asigură următorul şir de inegalităţi $a_n > cg_n > f_n > c_n > b_n > g_n$ pentru orice n număr natural, $5 \leq n \leq 75$, în Tabelul 2. Inegalităţile $c_n < g_n$ pentru orice n natural, $5 \leq n \leq 75$, din Tabelul 2 ne permit să considerăm conjectura 2.1 .

Dacă conjectura lui Legendre şi conjectura 2.1 sunt adevărate, atunci şi conjectura lui Smarandache este adevărată.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Andrica, *Note on a conjecture in prime number theory*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. **31** (1986), no. 4, 44–48.
2. C. Caldwell, *The prime pages*, `http://primes.utm.edu/n0tes/gaps.html`, 2012.
3. Ch. K. Caldwell, *Lists of small primes*, `https://primes.utm.edu/lists/small`, Nov. 2014.
4. H. Cramér, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, Acta Arith. **2** (1936), 23–46.
5. P. Erdös, *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Scientifica Mathematica **5** (1932), 194–198.
6. A. Granville, *Harald Cramér and the distribution of prime numbers*, Scand. Act. J. **1** (1995), 12–28.
7. R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd ed., p. 7, Springer-Verlag, New York, 1994.
8. G. H. Hardy and W. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., ch. §2.8 Unsolved Problems Concerning Primes and §3 Apendix, pp. 19 and 415–416, Oxford University Press, Oxford, England, 1979.
9. G. Hoheisel, *Primzahlprobleme in der Analysis*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **33** (1930), 3–11.
10. E. Landau, *Elementary number theory*, Celsea, 1955.

11. A. Loo, *On the primes in the interval* $[3n, 4n]$, Int. J. Contemp. Math. Sciences. **6** (2011), no. 38, 1871–1882.
12. H. Maier, *Primes in short intervals*, The Michigan Mathematical Journal **32** (1985), no. 2, 131–255.
13. P. Mihăilescu, *On some conjectures in additive number theory*, Newsletter of the European Mathematical Society **1** (2014), no. 92, 13–16.
14. T. R. Nicely, *New maximal prime gaps and first occurrences*, Mathematics of Computation **68** (1999), no. 227, 1311–1315.
15. T. Oliveira e Silva, *Gaps between consecutive primes*, `http://sweet.ua.pt/tos/gaps.html`, 30 Mach. 2014.
16. H. C. Orsted, G. Forchhammer, and J. J. Sm. Steenstrup (eds.), *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder*, pp. 169–179, `http://books.google.ro/books?id=UQgXAAAAYAAJ`, 1883.
17. G. A. Paz, *On Legendre's, Brocard's, Andrica's, and Oppermann's conjectures*, arXiv:1310.1323v2 [math.NT], 2 Apr 2014.
18. M. I. Petrescu, *A038458*, `http://oeis.org`, 3 Oct. 2014.
19. S. Ramanujan, *A proof of Bertrand's postulate*, Journal of the Indian Mathematical Society **11** (1919), 181–182.
20. P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, 3rd ed., pp. 132–134 and 206–208 and 397–398, Springer-Verlag, New York, 1996.
21. H. Riesel, *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, 2nd ed., ch. The Cramér Conjecture, pp. 79–82, MA: Birkhäuser, Boston, 1994.
22. C. Rivera, *Conjecture 30. The Firoozbakht conjecture*, `http://www.primepuzzles.net/conjectures/conj_030.htm`, 22 Aug. 2012.
23. ______, *Problems & puzzles: Conjecture 007. The Cramér's conjecture*, `http://www.primepuzzles.net/conjectures/conj_007.htm`, 03 Oct. 2014.
24. N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://oeis.org`, 8 Oct. 2014.
25. F. Smarandache, *Conjectures which generalize Andrica's conjecture*, Octogon **7** (1999), no. 1, 173–176.
26. E. W. Weisstein, *Brocard's conjecture*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/BrocardsConjecture.html`, 26 Sept. 2014.
27. ______, *Prime counting function*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/PrimeCountingFunction.html`, 26 Sept. 2014.
28. ______, *Prime gaps*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/PrimeGaps.html`, 26 Sept. 2014.
29. ______, *Smarandache constants*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/SmarandacheConstants.html`, 26 Sept. 2014.
30. E. Westzynthius, *Über die Verteilung der Zahlen die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind*, Commentationes Physico-Mathematicae Helingsfors **5** (1931), 1–37.
31. M. Wolf, *Some heuristics on the gaps between consecutive primes*, `http://arxiv.org/pdf/1102.0481.pdf`, 5 May 2011.

32. M. Wolf and M. Wolf, *First occurrence of a given gap between consecutive primes*, 1997.

"AUREL VLAICU" UNIVERSITY OF ARAD, ROMÂNIA