DOI: 10.15960/j.cnki.issn.1007-6093.2017.02.012

基于单值中智集 Choquet 积分算子的群决策方法*

韩莉莉[1,†] 魏翠萍[2]

摘要 单值中智集不仅能描述现实决策系统中不完整信息而且能描述不确定性和不一致信息, 已有关于单值中智集的决策方法只能用来解决属性间相互独立的多属性决策问题. 考虑到Choquet积分算子的特点, 将Choquet积分算子应用到单值中智集中, 用以解决属性间有关联关系的多属性群决策问题. 首先应用单值中智集余弦相似度比较方法, 提出了单值中智集Choquet积分算子, 研究了其性质. 然后建立了基于单值中智集Choquet积分算子的多属性群决策方法. 最后通过实例分析说明了算法的可行性和有效性.

关键词 多属性群决策, 单值中智集, Choquet积分, 集结算子

中图分类号 C934

2010 数学分类号 90B50

Group decision making method based on single valued neutrosophic Choquet integral operator*

HAN Lili[1,†] WEI Cuiping[2]

Abstract Single valued neutrosophic set (SVNS) depicts not only the incomplete information, but also the indeterminate information and inconsistent information which exist commonly in belief systems. The existing decision making methods for SVNS consider the case that the attributes are independent, and cannot handle the correlation among attributes. Based on the Choquet integral and the cosine similarity degree of single valued neutrosophic number, we propose an operator to aggregate single valued neutrosophic numbers (SVNNs), which can deal with the single valued neutrosophic information with connective attributes. By using the proposed single valued neutrosophic Choquet integral operator, an approach is given for the multi-attribute group decision making problems with SVNNs. An example is showed to illustrate the validity and applicability of the proposed method.

Keywords multi-attribute group decision making, single valued neutrosophic sets, Choquet integral, aggregation operators

Chinese Library Classification C934

2010 Mathematics Subject Classification 90B50

收稿日期: 2017-03-28

* 基金项目: 国家自然科学基金 (No. 71371107)

1. 曲阜师范大学管理学院, 山东日照 276800, College of Operations and Management, Qufu Normal University, Rizhao 276800, Shandong, China

2. 扬州大学数学科学学院, 江苏扬州 225002, College of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225002, Jiangsu, China

† 通信作者 E-mail: hllrz@163.com

0 引 言

自 Zadeh[1]提出模糊集概念以来, 模糊集理论得到了广泛研究. Atanassov[2-3]在传统模糊集的基础上通过增加非隶属度函数提出了直觉模糊集理论. 直觉模糊集能更容易表达模糊信息, 自提出以来得到了迅速发展和广泛应用. 但直觉模糊集只能处理不完全信息却不能处理不确定性和不一致信息. 例如, 在一些调查问卷的多项选择中, 有选项: 正确、错误、不确定. 由于决策者个人的认知能力有限, 决策者可能在正确和不确定两个选项中犹豫, 可能会同时选择两者, 最终出现的统计结果为: 正确的比率为0.5, 错误的比率为0.4, 不确定的比率为0.3. 显然直觉模糊集无法表达此类信息. 于是 Smarandache[4]在直觉模糊集的基础上提出了中智集理论. 中智集理论在直觉模糊集基础上增加了独立的不确定度, 是模糊集和直觉模糊集的一种推广. 采用中智集理论, 上述例子中的决策信息可以描述为 $x(0.5, 0.3, 0.4)$.

在中智集理论中决策者可以使用真实程度、失真度和不确定程度来描述对客观事物的评价, 自提出以来引起了广泛的关注和研究[5-16]. 早期的中智集是从哲学角度提出的, 难于应用于实际决策中. Wang 和 Smarandache[12-14]等基于中智集理论从技术角度提出了一种单值中智集概念, 并讨论了其相关运算规则和性质. Liu 和 Tang[10]提出了基于区间中智集的加权集结算子和决策方法. Ye[14-16]提出了基于单值中智集交叉熵和相似度的决策方法, Wang[17-19]等提出了基于单值中智集的 MSM 算子和 TODIM 等多属性决策方法.

已有关于单值中智集决策方法的研究主要考虑属性之间相互独立的决策问题, 而在现实决策中, 属性之间常常存在各种关联关系, 需要考虑评价信息为单值中智集且属性间有关联关系的多属性决策问题. 鉴于 Choquet 积分算子可以考虑信息间的相互关系[20], 本文将其推广到单值中智集情形, 利用单值中智集的余弦相似度比较方法[14], 提出了单值中智集 Choquet 积分算子. 该算子不仅考虑了属性间的重要性, 同时也可以反映属性间的关联关系, 然后对该算子的性质和特殊情形进行了讨论, 并在此算子基础上提出了求解多属性群决策问题的算法.

1 单值中智集及其运算和性质

定义 1.1[9] 设 X 为一对象集, $A = \{x(T_A(x), I_A(x), F_A(x))|x \in X\}$, 则称为单值中智集. $T_A(x), I_A(x), F_A(x)$ 分别表示属于的真实程度, 不确定程度和失真程度, 满足 $\forall x \in X$, $T_A(x), I_A(x), F_A(x) \in [0, 1]$, $0 \leqslant T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \leqslant 3$. 称 $(T(x), I(x), F(x))$ 为单值中智数, 并将其简记为 $x = (T_x, I_x, F_x)$.

定义 1.2[9] 对任意中智数 $x_i = (T_i, I_i, F_i), x_j = (T_j, I_j, F_j)$, 其相关运算定义如下:

(1) $x_i \oplus x_j = (T_i + T_j - T_iT_j, I_iI_j, F_iF_j)$;

(2) $x_i \otimes x_j = (T_iT_j, I_i + I_j - I_iI_j, F_i + F_j - F_iF_j)$;

(3) $\lambda x_i = \big(1 - (1 - T_i)^\lambda, (I_i)^\lambda, (F_i)^\lambda\big), \lambda > 0$;

(4) $(x_i)^\lambda = \big((T_i)^\lambda, 1 - (1 - I_i)^\lambda, 1 - (1 - F_i)^\lambda\big), \lambda > 0$;

(5) x_i 的补集 $x_i^C = (1 - T_i, 1 - I_i, 1 - F_i)$.

上述运算规则具有如下性质:

(1) $x_i \oplus x_j = x_j \oplus x_i$;

(2) $x_i \otimes x_j = x_j \otimes x_i$;

(3) $\lambda(x_i \oplus x_j) = \lambda(x_i \oplus \lambda x_j), \lambda > 0$;

(4) $(x_i \otimes x_j)^\lambda = (x_i)^\lambda \otimes (x_j)^\lambda, \lambda > 0$;

(5) $(\lambda_1 \otimes \lambda_2)x_i = \lambda_1 x_i \oplus \lambda_2(x_i), \lambda > 0$;

(6) $(x_i)^{(\lambda_1+\lambda_2)} = (x_i)^{\lambda_1} \otimes (x_i)^{\lambda_2}, \lambda_1, \lambda_2 > 0$.

定义 1.3[15] 对中智数 $x_i = (T_i, I_i, F_i)$, 称 $S(x_i) = \frac{T_i}{\sqrt{(T_i)^2+(F_i)^2+(F_i)^2}}$ 为中智数 x_i 的余弦相似度.

定义 1.4[15] 对任给中智数 $x_i = (T_i, I_i, F_i)$, $x_j = (T_j, I_j, F_j)$, 若 $S(x_i) \leqslant S(x_j)$, 则称 x_i 不优于 x_j, 记为 $x_i \leqslant x_j$.

2 基于单值中智集的 Choquet 积分算子

2.1 λ 模糊测度和 Choquet 积分算子

定义 2.1[20] 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为非空经典集合, $\mu(x_i)$ 表示 x_i 的权重, 称 $\mu : (X) \to [0, 1]$ 为集合 X 的 λ 模糊测度. 若 μ 满足:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$;

(2) $\forall B, C \subseteq X$, 若 $B \subseteq C$, 则 $\mu(B) \leqslant \mu(C)$;

(4) $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) + \lambda\mu(B)\mu(C), \forall B, C \subseteq X$, 且 $\lambda \in (-1, \infty)$.

下面我们讨论定义 2.1 的特殊情形:

(i) 当 $\lambda = 0$ 时, 表示集合 B, C 相互独立, 此时 λ 模糊测度变为可加性测度, 满足

$$\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C), \forall B, C \subseteq X, B \cap C = \varnothing. \tag{2.1}$$

在这种情形下, 如果 X 中的元素都是独立的, 则有

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} \mu(x_i), \forall A \in X. \tag{2.2}$$

(ii) 如果 $\forall x_i \in X, i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j, x_i \cap x_j = \varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i = X$. 此时 λ 模糊测度满足等式 (2.3):

$$\mu(X) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} x_i\Big) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\Big(\prod\limits_{i=1}^{n}(1 + \lambda\mu(x_i)) - 1\Big), & \lambda \neq 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(x_i), & \lambda = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

(iii) 因为 $\mu(X) = 1$, 根据式 (2.3), 当 $\lambda \neq 0$, 可由下式确定 λ 的值,

$$\lambda + 1 = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda\mu(x_i)). \tag{2.4}$$

定义 2.2[17] 若 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个非空经典集, f 是定义在 X 上的非负实值函数, μ 是 X 上的一个 λ 模糊测度. 函数 f 关于 μ 的 Choquet 积分定义如下:

$$C_\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} f_{\sigma(i)}\big(\mu(A_{\sigma(i)}) - \mu(A_{\sigma(i-1)})\big), \tag{2.5}$$

其中 $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,3,\cdots,n)$ 的一个排列, 使得 $f_{\sigma(1)}\geqslant f_{\sigma(2)}\geqslant\cdots\geqslant f_{\sigma(n)}$ 且 $A_{\sigma(j)}=\{x_{\sigma(k)}\mid k\leqslant j\}(j\geqslant 1)$, $x_{\sigma(k)}$ 是与 $f_{\sigma(k)}$ 相对应的属性权重, 规定 $A_{\sigma(0)}=\varnothing$.

2.2 单值中智集 Choquet 积分算子

定义 2.3 若 $X=\{x_i|x_i=(T_i,I_i,F_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 是一个单值中智数的集合, μ 为定义在 X 上的 λ 模糊测度, 则称

$$\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigoplus_{i=1}^{n}\big(\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})\big)x_{\sigma(i)} \tag{2.6}$$

为单值中智集 Choque 积分算子, 其中 $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,3,\cdots,n)$ 的一个排列, 使得 $f_{\sigma(1)}\geqslant f_{\sigma(2)}\geqslant\cdots\geqslant f_{\sigma(n)}$ 且 $B_{\sigma(j)}=\{x_{\sigma(k)}\mid k\leqslant j\}(j\geqslant 1)$, $x_{\sigma(k)}$ 是与 $f_{\sigma(k)}$ 相对应的属性权重, 规定 $B_{\sigma(0)}=\varnothing$.

根据单值中智集的相关运算规则, SVNCI 算子可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-T_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\\&\prod_{i=1}^{n}(I_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod_{i=1}^{n}(F_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\Big).\end{aligned} \tag{2.7}$$

根据 SVNCI 算子的定义, 可以得到如下性质:

性质 2.1 若 X 中的元素是相互独立的, $\mu(x_i)$ 代表 x_i 的权重, 则

$$\mu(x_{\sigma(i)})=\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)}),i=1,2,\cdots,n.$$

此时 SVNCI 算子退化为单值中智集加权平均 (SVNWA) 算子:

$$\mathrm{SVNWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigoplus_{i=1}^{n}(\mu(x_i))x_i=\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-T_i)^{\mu(x_i)},\prod_{i=1}^{n}(I_i)^{\mu(x_i)},\prod_{i=1}^{n}(F_i)^{\mu(x_i)}\Big).$$

性质 2.2 若 $\forall A\subseteq X$, $\mu(A)=\sum\limits_{i=1}^{|A|}\omega_i$ ($|A|$ 表示集合 A 中元素的个数), $\omega_i=\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}},\omega_i\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$, 则 SVNCI 算子退化为单值中智集有序加权平均 (SVNOWA) 算子:

$$\mathrm{SVNOWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigoplus_{i=1}^{n}(\omega_i x_{\sigma(i)})=\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-T_{\sigma(i)})^{\omega_i},\prod_{i=1}^{n}(I_{\sigma(i)})^{\omega_i},\prod_{i=1}^{n}(F_{\sigma(i)})^{\omega_i}\Big).$$

根据 SVNCI 算子的定义及单值中智集的运算法则, 可以得到如下结论.

定理 2.1 设 $x_i=(T_i,I_i,F_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个单值中智数, 则 SVNCI 算子的集结值也是一个单值中智数.

证明 由 $\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})=\mu(x_i)+\lambda\mu(B_{\sigma(i-1)}\mu(x_i))=\mu(x_i)(1+\lambda\mu(B_{\sigma(i-1)}))$, $\lambda\in(-1,\infty)$, 可得 $\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})\geqslant 0$. 因为 $x_i=(T_i,I_i,F_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是单值中智数, 所以 $0\leqslant T_i\leqslant 1$, $0\leqslant I_i\leqslant 1$ 且 $0\leqslant F_i\leqslant 1$. 因此有

$$0\leqslant 1-\prod_{i=1}^{n}(1-T_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\leqslant 1,\quad 0\leqslant\prod_{i=1}^{n}(I_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\leqslant 1,$$

$$0 \leqslant \prod_{i=1}^{n}(F_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})} \leqslant 1.$$

由式 (2.7) 可知, SVNCI 算子的集结结果也是一个单值中智数.

定理 2.2 (幂等性) 设 $x_i=(T_i,I_i,F_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $x=(T,I,F)$ 是单值中智数, 若 $x_i=x$, 则 $\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x$.

证明 因 $\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$
$\Big(1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-T_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod\limits_{i=1}^{n}(I_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod\limits_{i=1}^{n}(F_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\Big)$
且 $x_i=x(i=1,2,\cdots,n)$, 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(T_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod_{i=1}^{n}((I)_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\\&\prod_{i=1}^{n}((F)_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\Big)\\=&\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-T)^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod_{i=1}^{n}(I)^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\\&\prod_{i=1}^{n}(F)^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\Big).\end{aligned}$$

根据单值中智集的运算规则, 有

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}(1-T)^{(\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)}))}\\=&\ (1-T)^{\mu(B_{\sigma(n)})-\mu(B_{\sigma(n-1)})+\mu(B_{\sigma(n-1)})-\mu(B_{\sigma(n-2)})+\cdots+\mu(B_{\sigma(1)})-\mu(B_{\sigma(0)})}\\=&\ (1-T)^{\mu(B_{\sigma(n)})-\mu(B_{\sigma(\Phi)})}.\end{aligned}$$

由定义 2.1, $\mu(B_{\sigma(n)})-\mu(B_{\sigma(\Phi)}=1-0=1$. 故

$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-T_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})})=1-(1-T)=T.$$

类似地, 可以得到

$$\prod_{i=1}^{n}(I_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}=I,\ \prod_{i=1}^{n}(F_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}=F.$$

故 $\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x$.

定理 2.3 (置换性) 设 $x_i=(T_i,I_i,F_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是单值中智数集合. 若 $(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\cdots,\widetilde{x}_n)$ 是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个任意排列, 则 $\mathrm{SVNCI}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\cdots,\widetilde{x}_n)=\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 根据 SVNCI 算子的定义易证结论成立.

定理 2.4 (单调性) 设 $x_i=(T_i,I_i,F_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $y_i=(\widetilde{T}_i,\widetilde{I}_i,\widetilde{F}_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是任意两组单值中智数. 若对于任意 i 有 $T_i\geqslant\widetilde{T}_i$, $I_i\leqslant\widetilde{I}_i$, 且 $F_i\leqslant\widetilde{F}_i$, 则 $\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\mathrm{SVNCI}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

证明 由式 (2.7) 得:

$$\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-T_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod_{i=1}^{n}(I_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod_{i=1}^{n}(F_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\Big).$$

$$\mathrm{SVNCI}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\widetilde{T}_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod_{i=1}^{n}(\widetilde{I}_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},\prod_{i=1}^{n}(\widetilde{F}_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\Big).$$

由定理 2.1 中证明, 可得 $\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})>0$, 又因对于任意 i 有 $T_i\geqslant\widetilde{T}_i$, $I_i\leqslant\widetilde{I}_i$, 且 $F_i\leqslant\widetilde{F}_i$, 故

$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-T_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\geqslant 1-\prod_{i=1}^{n}(1-\widetilde{T}_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},$$

$$\prod_{i=1}^{n}(I_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\leqslant\prod_{i=1}^{n}(\widetilde{I}_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})},$$

$$\prod_{i=1}^{n}(F_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}\leqslant\prod_{i=1}^{n}(\widetilde{F}_{\sigma(i)})^{\mu(B_{\sigma(i)})-\mu(B_{\sigma(i-1)})}.$$

记 $x=\mathrm{SVNCI}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(T,I,F)$, $y=\mathrm{SVNCI}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(\widetilde{T},\widetilde{I},\widetilde{F})$, 因此有 $T\geqslant\widetilde{T},I\geqslant\widetilde{I}$ 且 $F\geqslant\widetilde{F}$. 又由定义 1.3 可得,

$$S(x)=\frac{T}{\sqrt{T^2+I^2+F^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{I^2+F^2}{T^2}}},\quad S(y)=\frac{\widetilde{T}}{\sqrt{\widetilde{T}^2+\widetilde{I}^2+\widetilde{F}^2}},$$

故 $S(x)\geqslant S(y)$, 所以 $x\geqslant y$, 定理 2.4 得证.

定理 2.5 (有界性) 设 $x_i=(T_i,I_i,F_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个单值中智数且

$$x^-=(\min_i\{T_i\},\max_i\{I_i\},\max_i\{F_i\}),x^+=(\max_i\{T_i\},\min_i\{I_i\},\min_i\{F_i\}).$$

根据定义1.4, 定理2.3 和定理2.4, 易证定理2.5 成立.

3 基于 SVNCI 算子的多属性决策方法及其应用

3.1 基于 SVNCI 算子的多属性决策方法

决策信息为单值中智集的多准则群决策问题描述如下: 设有 m 个方案 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, n 个决策属性 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$, t 个决策者 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_t\}$; 决策者的权重向量为 $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_t\}$, 满足 $\omega_i>0,\sum\limits_{i=1}^{t}\omega_i=1$; $\mu_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为决策者给出的属性

c_j 的密度函数. 设决策者 d_k 给出的方案 x_i 在属性 c_j 下的评价值为单值中智数 $r_{ij}^k=(\overline{T}_{ij}^k,\overline{I}_{ij}^k,\overline{F}_{ij}^k)$, 其构成的决策矩阵记为 $R^k=[r_{ij}^k]_{m\times n}$.

基于单值中智集上的Choquet积分算子, 建立单值中智集的多属性决策方法, 具体步骤如下:

步骤1 规范化决策矩阵, 得到各个决策者 d_k 的规范化决策矩阵 $R^k=[\bar{r}_{ij}^k]_{m\times n}$. 对于效益型准则, 相应的决策信息不变; 对于成本型准则, 取决策信息的补集, 即 $r_{ij}=(\bar{r}_{ij}^k)^C=(1-\overline{T}_{ij}^k,1-\overline{I}_{ij}^k,1-\overline{F}_{ij}^k)$.

步骤2 利用SVNCI算子对各决策者的决策矩阵进行集结, 得到群决策矩阵 $R=[r_{ij}^k]_{m\times n}$, 其中 $r_{ij}=(T_{ij},I_{ij},F_{ij})=\mathrm{SVNCI}(r_{ij}^1,r_{ij}^2,\cdots,r_{ij}^t)$,

$$\mathrm{SVNCI}(r_{ij}^1,r_{ij}^2,\cdots,r_{ij}^t)=\bigoplus_{l=1}^{t}(\omega_l r_{ij}^l)=\Big(1-\prod_{l=1}^{t}(1-T_{ij}^l)^{\omega_l},\ \prod_{l=1}^{t}(I_{ij}^l)^{\omega_l},\prod_{l=1}^{t}(F_{ij}^l)^{\omega_l}\Big).$$

步骤3 根据公式(2.4)计算 λ 的值.

步骤4 利用SVNCI算子集结方案 x_i 在不同属性下评价值 r_i:

$$\begin{aligned}r_i&=(T_i,I_i,F_i)=\mathrm{SVNCI}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{in})\\&=\bigoplus_{j=1}^{n}\big(\mu(B_{\sigma(j)})-\mu(B_{\sigma(j-1)})\big)r_{i\sigma(j)}\\&=\Big(1-\prod_{j=1}^{n}(1-T_{i\sigma(j)})^{\mu(B_{\sigma(j)})-\mu(B_{\sigma(j-1)})},\prod_{j=1}^{n}(I_{i\sigma(j)})^{\mu(B_{\sigma(j)})-\mu(B_{\sigma(j-1)})},\\&\quad\prod_{j=1}^{n}(F_{i\sigma(j)})^{\mu(B_{\sigma(j)})-\mu(B_{\sigma(j-1)})}\Big).\end{aligned}$$

其中 $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 为 $(1,2,3,\cdots,n)$ 的一个排列, 满足 $r_{i\sigma(1)}\geqslant r_{i\sigma(2)}\geqslant\cdots\geqslant r_{i\sigma(n)}$. $B_{\sigma(j)}=\{r_{i\sigma(k)}\mid k\leqslant j\}$, $j\geqslant 1$, 且 $B_{\sigma(0)}=\varnothing$.

步骤5 计算方案 x_i 的余弦相似度 $S(r_i)$, $S(r_i)=\frac{T_i}{\sqrt{(T_i)^2+(F_i)^2+(F_i)^2}}$.

步骤6 根据 $S(r_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的值和定义1.4对方案进行排序, 选择最优的方案.

上述多属性决策方法不仅考虑了各决策者的权重信息, 同时综合考虑了各属性间的相互关系.

3.2 实例分析

公司拟从4个供应商中选择一个综合能力最强的作为本公司的长期供货商. 参与此次评价的3个决策者构成的集合记为 $D=\{d_1,d_2,d_3\}$, 决策者的权重向量为 $\omega=(0.4,0.3,0.3)$. 4个供应商构成集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, 分别代表供应商 A, 供应商 B, 供应商 C 和供应商 D. 公司决策时考虑供应商在质量, 生产能力, 售后服务以及管理能力4个属性. 4个属性构成属性集 $C=\{c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4\}$, 各属性的模糊密度分别为 $\mu(c_1)=0.3$, $\mu(c_2)=0.3$, $\mu(c_3)=0.3$, $\mu(c_4)=0.2$.

步骤1 决策者在各属性下对4个供应商做出的评价信息, 用单值中智集描述, 如表1~3所示.

表 1 专家 d_1 的评价信息

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$(0.65, 0.10, 0.25)$	$(0.50, 0.18, 0.32)$	$(0.68, 0.12, 0.20)$	$(0.50, 0.10, 0.25)$
x_2	$(0.83, 0.12, 0.05)$	$(0.65, 0.15, 0.20)$	$(0.50, 0.10, 0.40)$	$(0.67, 0.18, 0.15)$
x_3	$(0.67, 0.13, 0.20)$	$(0.50, 0.15, 0.35)$	$(0.68, 0.12, 0.20)$	$(0.50, 0.20, 0.30)$
x_4	$(0.66, 0.14, 0.20)$	$(0.50, 0.16, 0.34)$	$(0.70, 0.10, 0.20)$	$(0.50, 0.15, 0.35)$

表 2 专家 d_2 的评价信息

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$(0.90, 0.02, 0.08)$	$(0.10, 0.10, 0.80)$	$(0.15, 0.15, 0.70)$	$(0.10, 0.05, 0.85)$
x_2	$(0.75, 0.15, 0.10)$	$(0.85, 0.05, 0.10)$	$(0.50, 0.10, 0.40)$	$(0.68, 0.10, 0.22)$
x_3	$(0.50, 0.05, 0.45)$	$(0.40, 0.15, 0.45)$	$(0.68, 0.12, 0.20)$	$(0.15, 0.05, 0.80)$
x_4	$(0.50, 0.10, 0.40)$	$(0.50, 0.10, 0.40)$	$(0.60, 0.10, 0.30)$	$(0.50, 0.05, 0.45)$

表 3 专家 d_3 的评价信息

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$(0.65, 0.15, 0.20)$	$(0.30, 0.10, 0.60)$	$(0.65, 0.20, 0.15)$	$(0.50, 0.10, 0.40)$
x_2	$(0.85, 0.05, 0.10)$	$(0.85, 0.05, 0.10)$	$(0.34, 0.16, 0.50)$	$(0.60, 0.10, 0.30)$
x_3	$(0.61, 0.18, 0.21)$	$(0.67, 0.13, 0.20)$	$(0.68, 0.22, 0.10)$	$(0.30, 0.10, 0.60)$
x_4	$(0.62, 0.28, 0.10)$	$(0.68, 0.22, 0.10)$	$(0.68, 0.12, 0.20)$	$(0.50, 0.10, 0.40)$

步骤 2 利用单值中智集的加权集结算子对各决策者给出的决策矩阵进行集结, 得到群决策矩阵:

$$R = \begin{pmatrix} (0.757, 0.067, 0.166) & (0.340, 0.126, 0.509) & (0.559, 0.149, 0.267) & (0.404, 0.081, 0.415) \\ (0.816, 0.099, 0.076) & (0.789, 0.078, 0.130) & (0.457, 0.115, 0.428) & (0.654, 0.126, 0.207) \\ (0.607, 0.107, 0.259) & (0.539, 0.144, 0.320) & (0.680, 0.144, 0.162) & (0.351, 0.107, 0.496) \\ (0.605, 0.156, 0.200) & (0.563, 0.153, 0.247) & (0.667, 0.105, 0.226) & (0.500, 0.095, 0.393) \end{pmatrix}.$$

步骤 3 利用公式 (2.4), 计算得到 $\lambda = -0.231\ 7$.

步骤 4 利用 SVNCI 算子, 根据公式 (2.7) 集结方案 $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 在不同属性下的评价值, 从而得到各方案的综合评价值:

$$x_1 = (0.572\ 1, 0.102\ 7, 0.293\ 3), x_2 = (0.721\ 3, 0.100\ 1, 0.161\ 7),$$
$$x_3 = (0.581\ 2, 0.126\ 5, 0.263\ 9), x_4 = (0.599\ 7, 0.527\ 5, 0.244\ 4)$$

根据定义 1.4, 四个方案的的排序结果为 $x_2 > x_4 > x_3 > x_1$, 供应商 B 为最合适的选择.

4 结论

本文在单值中智集余弦相似度定义的基础上, 提出了单值中智集 Choquet 积分算子, 构建了相应的多属性群决策方法. 该决策方法可以利用单值中智集的优点, 有效地描述实际决策问题中的不确定和不一致信息, 而且可以同时充分考虑属性自身的重要性和属性之间的相互关系, 从而使决策结果更具有客观性.

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. *Information and Control*, 1965, **8**(3): 338-356.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, **20**(1): 87-96.

[3] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, **31**(3): 343-349.

[4] Smarandache F. A unifying field in logics [M]//*Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set & Logic*. Rehoboth: American Research Press, 1999.

[5] Sengur A, Guo Y. Color texture image segmentation based on neutrosophic set and wavelet transformation [J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2011, **115**: 1134-1144.

[6] Cheng H D, Guo Y. A new neutrosophic approach to image thresholding [J]. *New Mathematics and Natural Computation*, 2008, **4**(3): 291-308.

[7] Guo Y, Cheng H D. New neutrosophic approach to image segmentation [J]. *Pattern Recognition*, 2009, **42**: 587-595.

[8] Liu P D, Shi L L. The generalized hybrid weighted average operator based on interval neutrosophic hesitant set and its application to multiple attribute decision making [J]. *Neural Computing and Applications*, 2015, **26**(2): 457-471.

[9] Liu P D, Wang Y M. Multiple attribute decision-making method based on single valued neutrosophic normalized weighted bonferroni mean [J]. *Neural Computing and Applications*, 2014, **25**(7-8): 2001-2010.

[10] Liu P D, Tang G L. Some power generalized aggregation operators based on the interval neutrosophic numbers and their application to decision making [J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2016, **30**: 2517-2528.

[11] Wang H, Smarandache F, Zhang Y, et al. Single valued neutrosophic sets [C]//*Proceedings Of 10th International Conference on Fuzzy Theory and Technology*. 2005, 21-26.

[12] Wang H, Smarandache F, Zhang Y Q, et al. Single valued neutrosophic sets [J]. *Multispace and Multistructure*, 2010, **4**: 410-413.

[13] Wang H, Smarandache F, Zhang Y Q, et al. Interval neutrosophic sets and logic: theory and applications in computing [J]. *Computer Science*, 2005, **65**(4): vi, 87.

[14] Ye J. Multicriteria decision-making method using the correlation coefficient under single-valued neutrosophic environment [J]. *International Journal of General Systems*, 2013, **42**(4): 386-394.

[15] Ye J. A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2014, **26**(5): 2459-2466.

[16] Ye J. Single valued neutrosophic cross-entropy for multicriteria decision making problems [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, **38**: 1170-1175.

[17] Ma Y X, Wang J Q, Wu X H. An interval neutrosophic linguistic multi-criteria group decision-making method and its application in selecting medical treatment options [J]. *Neural Computing and Applications*, DOI: 10.1007/s00521-016-2203-1, 2016.

[18] Wang J Q, Yang Y, Li L. Multi-criteria decision-making method based on single valued neutro–sophic linguistic Maclaurin symmetric mean operators [J]. *Neural Computing and Applications*, DOI: 10.1007/s00521-016-2747-0, 2016.

[19] Wang J Q, Li X E. TODIM method with multi-value neutrosophic sets [J].*Control and Decision*, 2015, **30**(6): 1139-1142.

[20] Choquet G. Theory of capacities [J]. *Annales de I'institut Fourier*, 1953, **5**: 131-295.