

împreună, adică, reuniunea celor două matematici, formând, ceea ce a fost denumită, așa cum s-a mai afirmat în volumul I al acestei lucrări, **supermatematică (SM)**.

15.5.2 REDAREA DERIVATELOR UNOR FUNCȚII

Verbul a reda are trei înțelesuri în limba română. Primul înțeles “a da din nou”, în sensul de “a restitui” este cel la care ne referim și nu “a descrie, a exprima” sau “a reproduce”.

Ce restituim ? Restituim unei funcții (de $s = \pm 1$), dintr-o familie de funcții, de $s \in [-\infty, +\infty]$, de exemplu, **FSM-CE**

$$(15.18) \quad \beta_{1,2}(\theta) = \text{bex}_{1,2}\theta, s \in [-\infty, +\infty],$$

derivata ei, care este, așa cum s-a mai afirmat, **FSM-CE**

$$(15.19) \quad d\beta_{1,2}(\theta) / d\theta = d[\theta - \alpha_{1,2}(\theta)] / d\theta = 1 - \text{dex}_{1,2}\theta.$$

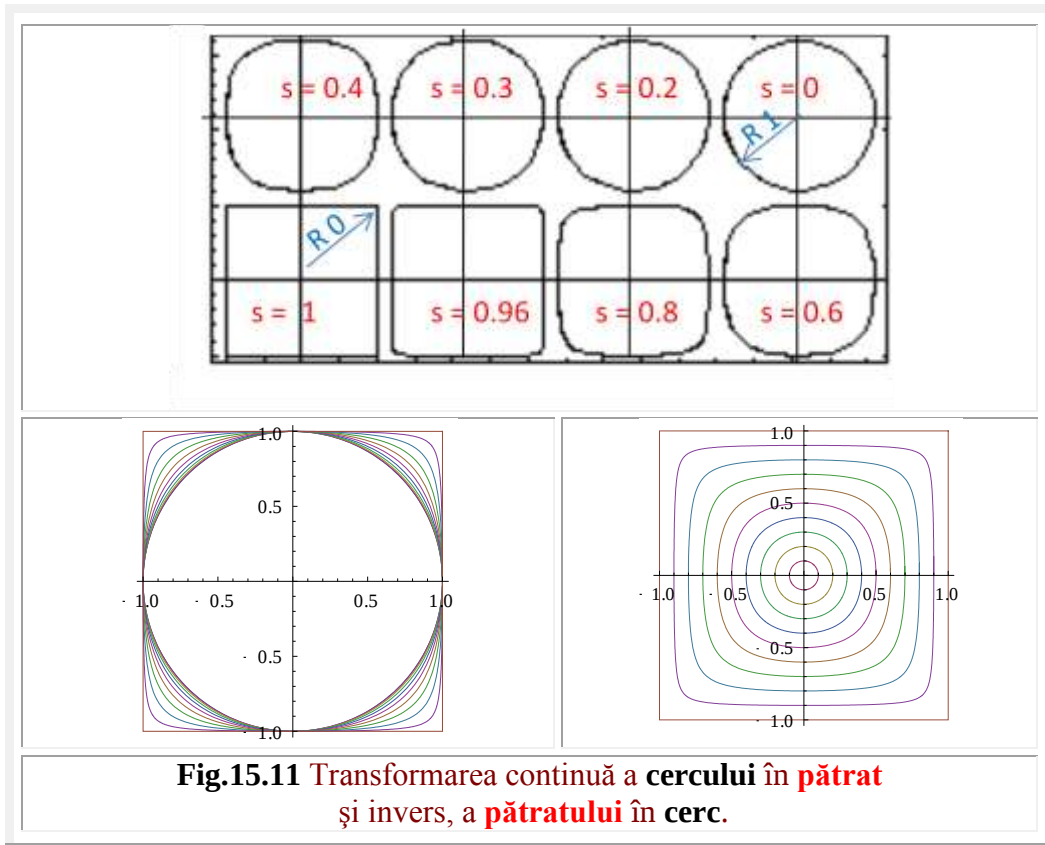
Derivată care există și pentru $s = \pm 1$, dar pe care **Weierstrass** i-a negat-o, pentru că el **întâi a dat valoarea $s = \pm 1$ familiei de funcții** (15.18) și **apoi a derivat**, pe când succesiunea acestor operații este inversă: **întâi se derivează familia de funcții și, apoi, derivata se particularizează pentru valoarea $s = \pm 1$** . Eroare scuzabilă, pentru că, la acea dată, nu se știa că cercul și pătratul au aceleași ecuații parametrice; pentru $s = 0$ obținându-se un **cerc perfect**, iar pentru $s = \pm 1$ un **pătrat perfect** (Fig.15.11).

Această relație **SM** simplă, în care, prin modificarea excentricității numerice s de la 0 la 1 se obține o transformare / mișcare continuă a cercului în pătrat, este o mișcare internă a **SM**.

Henri Bergson, un mare gânditor, admitea că (“GÂNDIRE ȘI MIȘCARE. Eseuri și conferințe”, Polirom, Iași, 1995, pag. 209) “*Matematica modernă este tocmai un efort de a înlocui ceea ce este gata făcut cu ceea ce se face, pentru a urmări generarea mărimilor, pentru a surprinde mișcarea nu din exterior și prin prisma urmărilor ei evidente, ci din interior și prin tendința ei de a schimba, pentru a adopta continuitatea mobilă a desenului lucrurilor*”.

Dar, cu toate acestea, *i se parea absurdă ideea că cercul și pătratul pot să facă parte din aceeași familie*. Cităm din **H. Bergson** “EVOLUȚIA CREATOARE. Eseuri de ieri și de azi”, Institutul European, 1998, pag. 258 “*Când am definit cercul mi-am reprezentat fără probleme un cerc negru sau alb, de carton, fier sau cupru, un cerc transparent sau opac – dar nu un cerc pătrat, pentru că legea generării cercului exclude (?) posibilitatea ca să delimitezi această figură prin linii drepte.*”

Să delimitezi, da, dar să curbezi o dreaptă și s-o transformi într-un cerc o știe toată lumea tehnologică ! Acum o află și tagma matematicienilor, deoarece, pornind de la pătrat, care este cercul de $s = \pm 1$ și micșorând progresiv, continuu, valoarea excentricității numerice de la $s = +1$ spre $s \rightarrow 0$, colțurile pătratului încep să se rotunjească cu raze de racordare R din ce în ce mai mari, iar când raza **de racordare R** ajunge la valoarea $+1$, pentru $s = 0$, cele patru raze de racordare ale colțurilor pătratului vor forma cercul perfect de rază $R = 1$, care este cercul unitate sau cercul trigonometric. Este “exact” ce se întâmplă la transformarea, prin strunjire din mai multe treceri, a unei bare pătrate în una circulară, cu diferența că la strunjire raza R nu este constantă, ci din ce în ce mai mică pe când în matematică ea rămâne constantă.



Modul în care porțiunile / segmentele de dreaptă alternează cu arce de cerc sunt mult mai evidente în **transformarea excentrică**, prezentată în Vol I, §5.1, **Fig. 5.6**, pag. 166, ca inversă a transformării de centrare. Astfel de transformări sunt prezentate în **figura 15.11** și sunt realizate cu ajutorul **FSM cvadrilobe**, cosinus cvadrilob **coq θ** și sinus cvadrilob **siq θ** prin ecuațiile parametrice

$$(15.20) \quad \begin{cases} x = R. siq\theta = R \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}} \\ y = R. coq\theta = R \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-s^2\cos^2\theta}} \end{cases}$$

Aceleași curbe închise se pot obține și cu **FSM-CE** derivată excentrică și cu ecuațiile parametrice

$$(15.21) \quad \begin{cases} x = R. dex\theta \\ y = R. dex(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

De fapt, așa cum s-a arătat într-o lucrare [Mircea Șelariu, “INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ”, Lucr. Simp. Naț. al Univ. Gh. Anghel, Drobeta Tr. Severin, 2003, pag. 171...178] **dreapta** nu este altceva decât o **strâmbă** de excentricitate numerică **$s = 0$** , iar o **linie frântă** este o strâmbă de **$s = \pm 1$** . Ca urmare, se poate afirma că transformarea pătratului în cerc este o strâmbare / încovoiere a patru

segmente de dreaptă, reciproc perpendiculare, în patru arce de cerc. Și invers, patrul se obține prin îndreptarea, continuă și progresivă, a patru arce de cerc, fiecare arc de cerc de $\frac{\pi}{2}$ fiind rotit cu $\frac{\pi}{2}$ față de cel precedent, în patru segmente de dreaptă.

Faptul că nu oricare funcție continuă este derivabilă, având drept consecință neexistența vitezei unui punct material, în fiecare moment al mișcării sale, ceea ce, **evident, nu corespunde realității**, constituie un neajuns sever al **MC**, care afectează unitatea și generalizarea rezultatelor, ceea ce nu este cazul în **ME**.

În 1872 a apărut o funcție al cărei grafic este considerat azi **fractal**, când **Karl Weierstrass** a dat un exemplu de funcție cu proprietatea că este continuă, dar **nederivabilă**, constatare care i-a oripilat pe matematicieni. **Hermite** declara “*Je me détourne avec horreur de ces fonctions continues sans dérivées*”.

Pentru exemplificare, se va alege prima funcție **nicăieri derivabilă**, prezentată de **Weierstrass** [**Schoenberg, J. Isaac**, “**PRIVELIȘTI MATEMATICE**”, Editura Tehnică, București, 1989, pag.105...115, Cap.11 «Despre curbe **Peano** și nediferențiabilitatea lor », **Fig. 11.2**] :

$$(15.22) \quad W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi t), \quad 0 < a < 1 \text{ și } b = 1,3,5 \dots, (2n-1),$$

un întreg impar, astfel ca $a \cdot b > 1 + 3\pi/2 = 5,712$.

În aceeași lucrare, este demonstrată ca fiind nediferențiabilă și funcția trapezoidală, (**Fig. 15.8**) dată de expresia (15.15) care reprezintă o diferență a funcțiilor beta excentrice de θ și de $\theta + \frac{\pi}{2}$, ambele de **excentricitate numerică $s = 1$** .

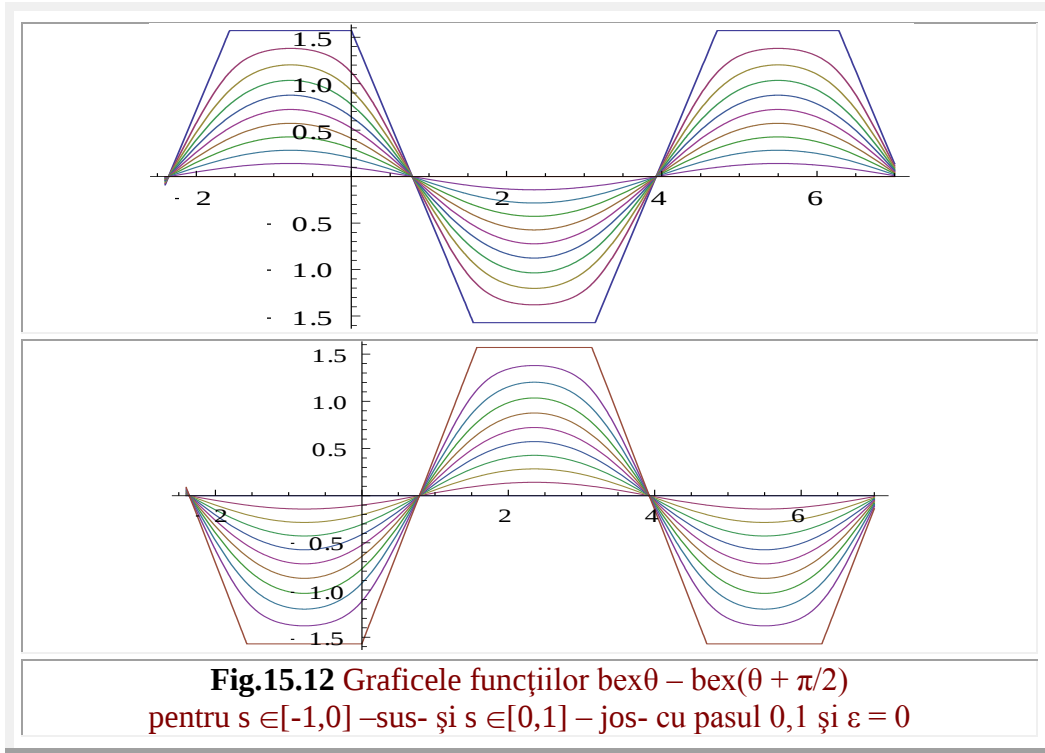
Familia acestor funcții, pentru $s \in [-1, 0]$ și $s \in [0, 1]$ au graficele din **figura 15.12**.

Va deveni evident faptul că funcția (15.15) este derivabilă, dacă întâi se derivează familia de funcții, deci pentru **$s \in [-1, 1]$** și în derivată, sau **după derivare**, se dă valoarea particulară de **$s = \pm 1$** !! Graficele derivatelor acestor funcții sunt prezentate în **figura 15.13**, iar în **figura 15.14** sunt prezentate aceleași grafice pentru **$s = \pm 1$** .

O modificare a exemplului lui **Weierstrass** se obține prin înlocuirea în (15.22) a lui $\cos \pi t$ prin splineul **Euler** liniar $E(t)$, care interpolează pe $\cos \pi t$ în toate valorile întregi ale lui t și se obține graficul din **figura 15.15,a**. Alăturat, s-a prezentat familia de **funcții supermatematice excentrice**, de variabilă excentrică $\theta \equiv t$, denumită **bext** și care este o componentă / termen al funcției amplitudine excentrica (**aex θ**), funcție definită prin relația

$$(12.23) \quad \alpha(\theta) = aex \theta = \theta - \beta(\theta) = \theta - bex \theta = \theta - \arcsin [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)],$$

în care **θ este variabila excentrică** sau unghiul pe care o semidreaptă pozitivă, turnantă în jurul excentrului **$E(e, \varepsilon)$** – sau în jurul punct solar **$S(s, \varepsilon)$** , îl face cu axa Ox . (**V.I.Arnold**: «*Kepler a afirmat că planetele se rotesc în jurul soarelui, pe orbite circulare, însă soarele nu se află în centrul cercurilor*»). De aici a rezultat denumirea **excentrului S de punct solar**. Iar α este variabila centrică sau arcul de cerc, al cercului unitate ($R = 1$) de la originea arcului $A(1,0)$ la un punct curent pe cerc **$W(1, \alpha) \equiv W(r = rex\theta, \theta)$** . **Excentricitatea unitară este $s = e/R$** , sau distanța dintre S și O , iar excentrul S și E sunt expulzate din centrul O pe direcția ε .



Pentru $\theta \rightarrow \pi.t$ și un defazaj $\varepsilon = -\pi/2$ se obține funcția sau, mai precis, familia de funcții beta excentrice

$$(15.24) \quad bex\ t = \arcsin[s \sin(\pi.t + \pi/2)],$$

a căror grafice, de excentricitate numerică $s \in [0, 1]$, cu pasul 0.1, sunt prezentate în **figura 15.15,b**.

Se observă, fără dificultate, că pentru $s = 0 \rightarrow aex\ t = 0$ și pentru $s = \pm 1$, limitele extreme (în grafice) a lui s , se obține graficul unei funcții în « **dinți triunghiulari simetrici** » (**Fig.15.15,a**).

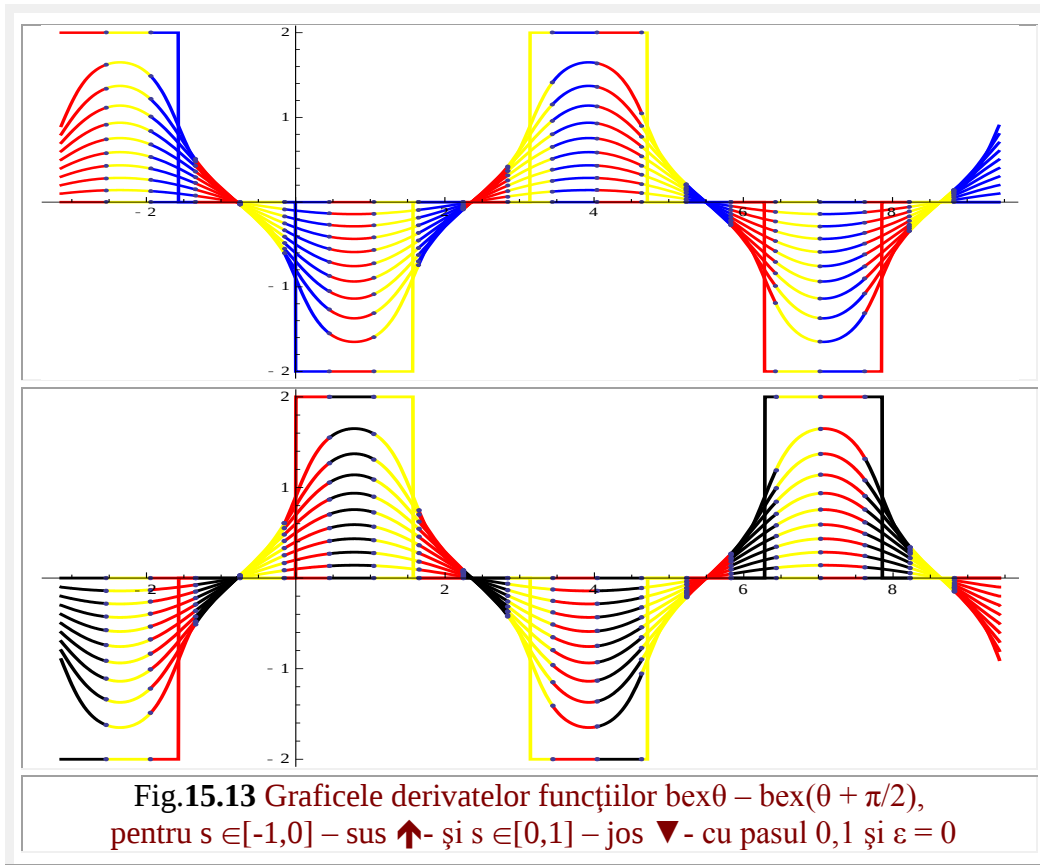
Deoarece, derivata funcției $aex\ t$ este funcția derivată excentrică **dexθ** :

$$(15.25) \quad d(aext)/dt = da/d\theta = dex\ \theta = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}},$$

rezultă că, cel de al doilea termen din relația (15.25), este tocmai derivata funcție **bexθ**, adică:

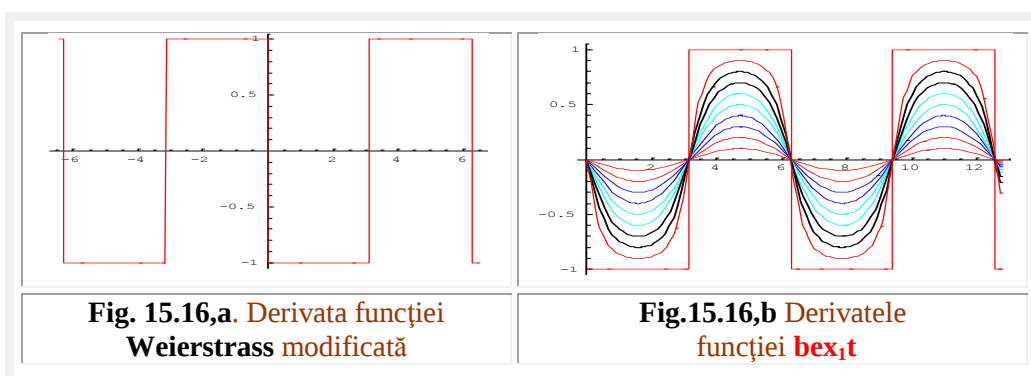
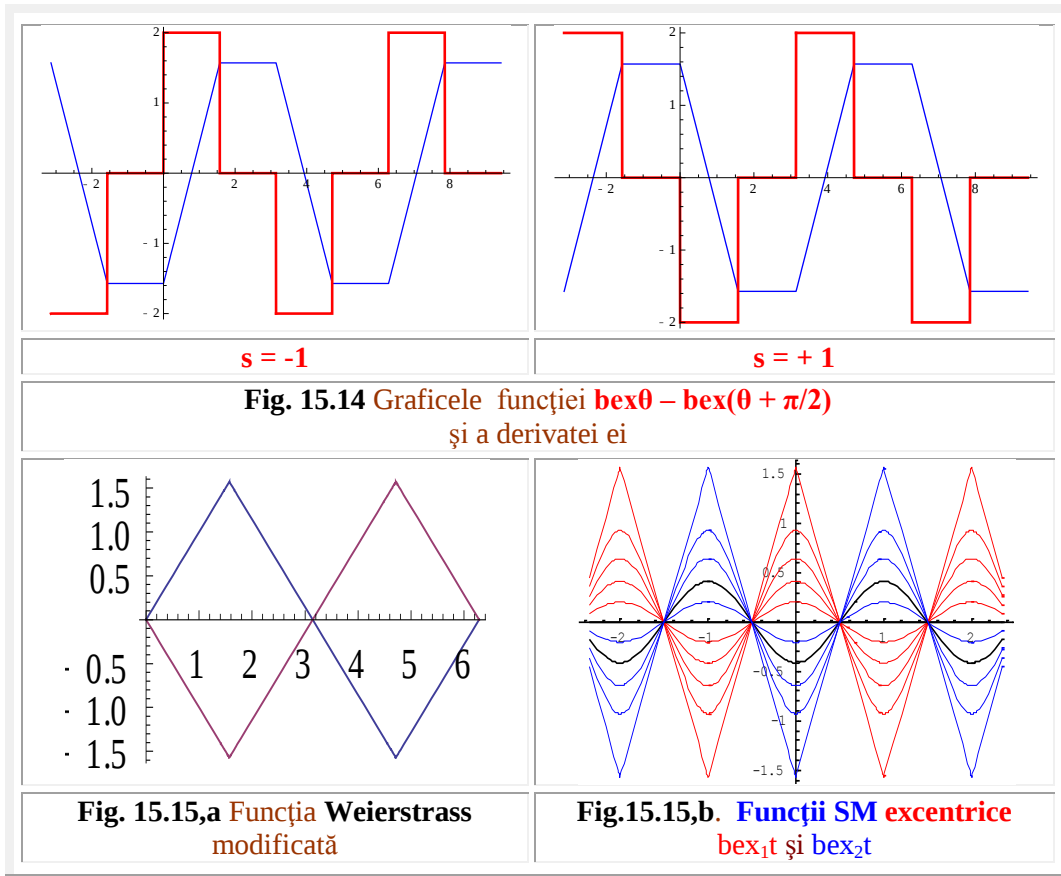
$$(15.26) \quad d(bex\ \theta)/d\theta = \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = s \cdot coq(\pi.t + \pi/2) = -s \cdot (siq\pi.t),$$

care este produsul **excentricității numerice s** cu funcția **cosinus cuadrilob coqθ** [Vol. I, Cap.2, §2.3, pag. 50 .. 56] defazată cu $\varepsilon = -\pi/2$, astfel că rezultă $-s \cdot siq\theta$, a cărei familii de grafice sunt prezentate în **figura 15.16,b**, pentru $s \in [0, 1]$, cu pasul 0.1 și, în **figura 15.16,a**, o singur funcție, pentru $s = 1$.



Funcția **sinus cuadrilob** (**siqθ**), pentru excentricitatea numerică **s = 1**, reprezintă, în teoria semnalelor, raspunsul unui releu la un semnal sinusoidal, funcție denumită și **sinus pătrat** [Săvescu, M., Constantin, I., Petrescu, T., METODE DE APROXIMARE ÎN ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRONICE, Editura Tehnică, București, 1982, pag. 31], fiind chiar funcția trigonometrică excentrică **sinus excentric**, de excentricitate numerică **s = 1**, definită pe un pătrat, ne rotit cu $\pi/4$ ca în cazul funcțiilor pătratice **Alaci**, funcție introdusă de autor în matematică sub denumirea de sinus cvadrilob / quadrilob – **siqθ** sau $\text{siq}\theta$ -, alături de funcția cosinus cvadrilob / cosinus quadrilob – **coqθ** sau $\text{coq}\theta$ - .

Coroborând funcțiile și derivatele lor, se observă că ele se corespund. Astfel, funcția **Weierstrass** modificată, din **figura 15.15,a**, privită ca o funcție **bext** de excentricitate numerică **s = 1**, devine complet derivabilă !.



15.5.3 ASUPRA DISTRIBUȚIILOR

În 1926 **P.A.M. Dirac** a introdus, în mecanica cuantică, “funcția” delta (δ) care este nulă peste tot, cu excepția unui punct (în origine luând valoarea ∞), definită prin:

$$(15.27) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

și a cărei integrală este

$$(15.28) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Aceeași valoare a integralei o are și funcția **impuls unitar** $\Delta(x, \lambda)$ definită de:

$$(15.29) \quad \Delta(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{\lambda}, & -\frac{\lambda}{2} \leq x \leq \frac{\lambda}{2} \\ 0, & x > \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Se observă că, pentru $\lambda \rightarrow 0$, se obține funcția **Dirac** $\delta(x)$.

Trebuie menționat că o definiție riguroasă a impulsului **Dirac** poate fi dată în cadrul **teoriei distribuțiilor** [Kecs, W., Teodorescu, P.P. APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN MECANICĂ, Editura Academiei Române, București, 1970] sau a **funcțiilor generalizate**, un capitol al analizei funcționale.

Impulsul unitar poate fi privit și ca derivată a funcției **treaptă unitară** (ideală), sau a funcției **Heaviside** $\Gamma(x)$, definită prin

$$(15.30) \quad \Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

admitînd, în acest fel, derivabilitatea oricărei funcții continue pe porțiuni.

Funcția **rampă unitară** este definită prin :

$$(15.31) \quad R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

și derivata ei este funcția treaptă unitară ideală (**Heaviside**).

15.5.4 FUNCȚII TREAPTĂ, IMPULS ȘI RAMPĂ UNITARE PERIODICE, EXPRIMATE CA FSM-CE ȘI CA FSM CUADRILOBE EXCENTRICE (FSM-QL)

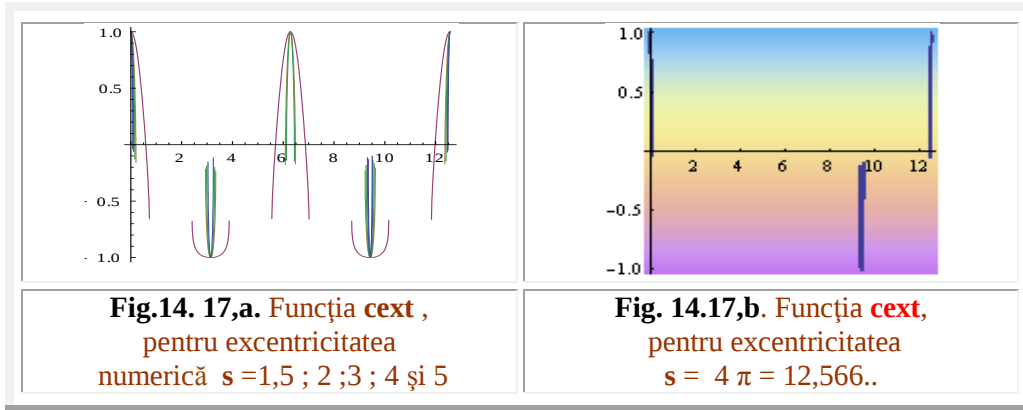
În figurile 15.17 și 15.18 sunt prezentate graficele funcțiilor **cosinus excentric** (**cext**) și, respectiv, **cosinus cuadrilob** excentric (**coqt**) pentru **excentricități numerice** **s** supraunitare.

Se observă că, odată cu creșterea valorii excentricității numerice **s**, domeniul de existență a funcțiilor se restrânge la intervalul în care, o dreaptă turnantă, din excentrul **S(s, ε)**, exterior cercului unitate, intersectează cercul unitate. Acest interval I este periodic, cu perioada 2π (π , dacă nu se face distincție între cel două semidrepte) și este dat de relația

$$(15.32) \quad I = t_{\text{final}} - t_{\text{initial}} = 2\gamma = 2\arcsin(1/s),$$

pentru care funcția

$$(15.33) \quad \text{del}\theta = \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)} = 0,$$



în care

$$(15.34) \quad t_{\text{initial}} = \pi + \varepsilon - \gamma = \pi \text{ și } t_{\text{final}} = \pi + \varepsilon + \gamma = \pi,$$

variabila excentrică: $t \equiv \theta \pmod{2\pi}$ astfel că, pentru excentrul S tinzând, pe axa x ($\varepsilon = 0$) spre infinit ($s \rightarrow \infty$), domeniul I tinde spre zero ($I \rightarrow 0$). Rezultă că, la $t = \pi$ și $s \rightarrow \infty$, funcția $c_{ex_1}t$ este un semnal **impuls**, de amplitudine -1, care se repetă periodic cu perioada 2π , iar, a doua determinare - secundară, de indice 2- a funcției $c_{ex_2}t = 1$ pentru $t = 0 + 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), deci și la $t = 2\pi$, pentru $s \rightarrow \infty$, așa cum rezultă și din **figura 15.16,a și 15.16,b**.

Se vor numi, în continuare, aceste funcții « **funcții impuls periodic c_{ext} de amplitudine unitate** cu $s \rightarrow \infty$ ». Pentru $\varepsilon = \pi/2$ se vor obține, asemănător, pentru $s \rightarrow \infty$, « **funcții impuls periodic sext de amplitudine unitate** ».

Deoarece

$$(15.35) \quad c_{ex_{1,2}}^2 t + s_{ex_{1,2}}^2 t = 1,$$

unde $c_{ex_{1,2}}t = \pm 1 \rightarrow s_{ex_{1,2}}t = 0$ și invers.

De aceea, la $t = \pi$, funcția $s_{ex_1}t = 0$ cu perioada 2π și funcția

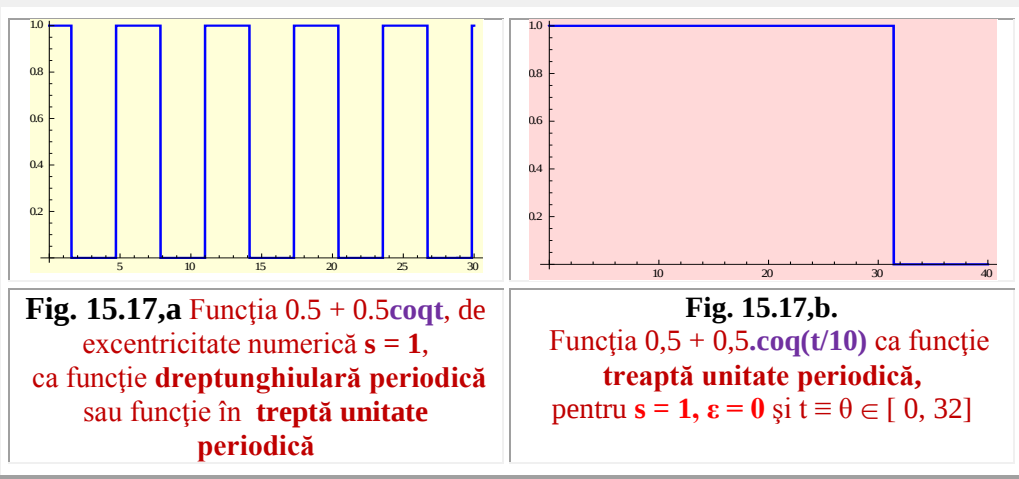
$$I(t,s) = \frac{1}{s_{ex_1}t} \Rightarrow \infty, \text{ obținându-se funcții **impuls unitar periodic**, de amplitudine}$$

infinită, asemanătoare funcției **Dirac**, doar că este periodică, cu perioada 2π .

Și funcția **cosinus cuadrilob** [Șelariu, Mircea Eugen, **QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**, The11th International Conference on Vibration Engineering, Timișoara, România, Sept. 27-30, 2005]

$$(15.36) \quad coq_1t = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$$

cu $\theta \equiv t$, pentru $s \rightarrow \infty$ are la $t = \pi \pm 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), a cărui numitor este funcția $\text{delt} = 0$ și $\cos 0 = 1$, astfel că amplitudinea tinde la infinit și se obține, din nou, o funcție impuls unitar periodică (**Fig.15.17,b**).



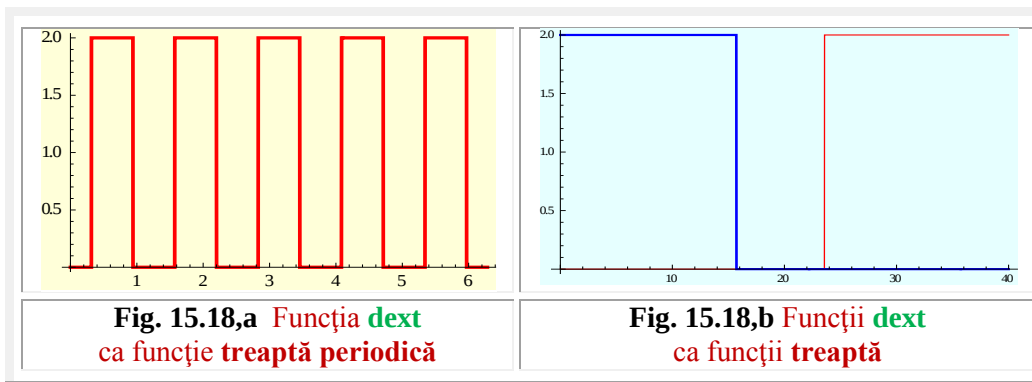
O funcție **dreptunghiulară** periodică de amplitudine unitate (**Fig.15.17,a**) este dată de funcția supermatematică **cuadrilobă excentrică** $0.5(1-\text{siq } t)$, defazată cu $-\pi$.

$$(15.37) \quad D(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin(t+\pi)}{\sqrt{1-s^2 \cos^2(t+\pi)}} \right], & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

care poate fi denumită **funcție treaptă unitară periodică**, dacă excentricitatea numerică $s = 1$.

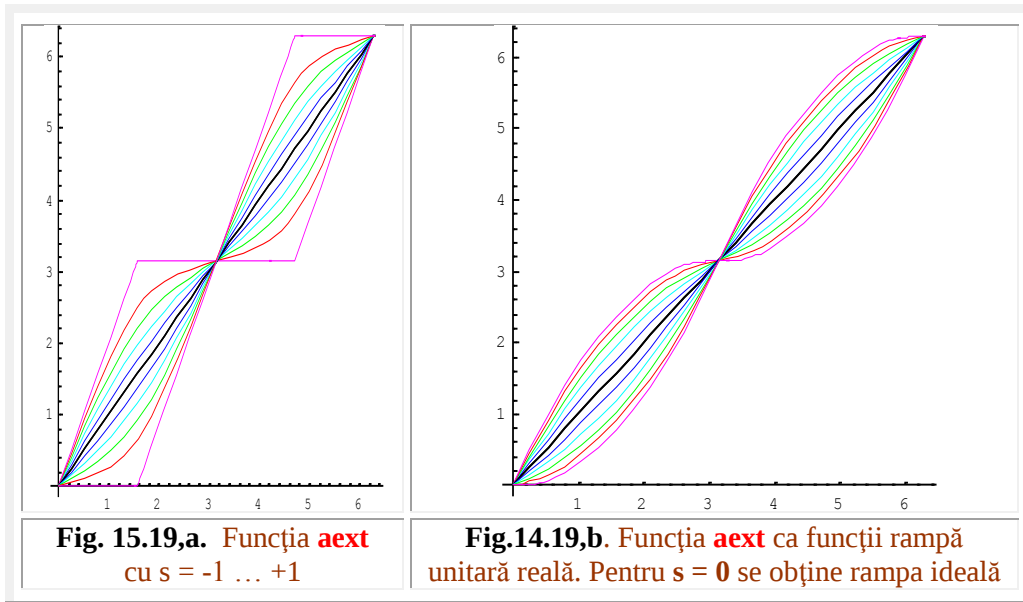
Dacă $t \rightarrow t/20$, (**Fig.14.17,b**) prima treaptă se prelungește de la π la 10π . Rezultă că pentru $t \rightarrow t/\infty \rightarrow 0$ se obține o funcție treaptă unitară pe toată axa $t > 0$.

O funcție asemănătoare se poate obține și cu funcția derivată excentrică **dext** de $s = 1$ (**Fig. 15.18,a**) cu $t \rightarrow t/10$ și $\varepsilon = -\pi$ (**Fig. 15.18,b**).



O funcție **rampă unitară ideală** se poate obține ca o dreaptă trecând prin origine, de coeficient unghiular **m** egal cu unitatea ($m = 1$).

$$(15.38) \quad y = \begin{cases} mx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



O funcție **rampă unitară reală**, care să admită anumite abateri față de liniaritate, se mai poate obține ca o **strâmbă** [Șelariu, Mircea Eugen, “**INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ**”, Lucr. Simp. Naț. Univ. “Gh. Anghel”, Drobeta Tr. Severin, mai, 2003, pag. 171 ... 178] ce trece prin originea $O(0,0)$.

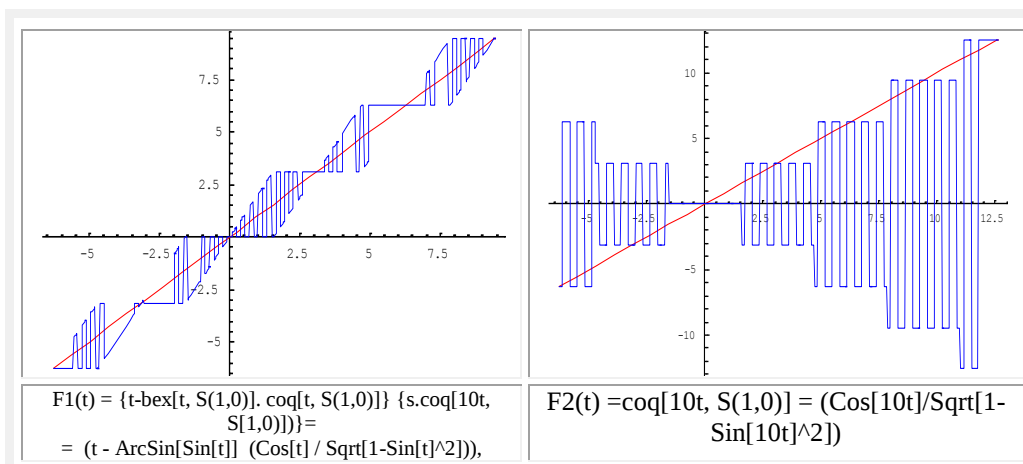
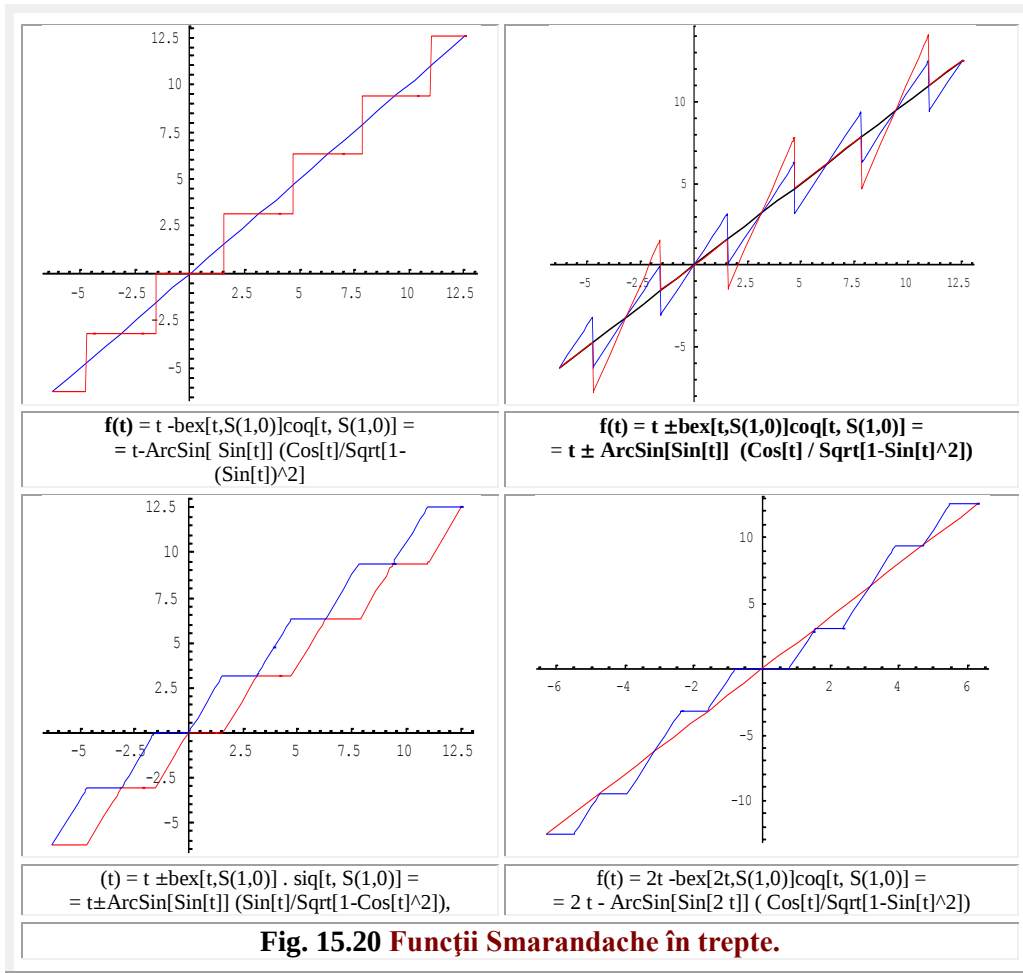
O **familie de strambe**, obținute pentru $s \neq 0$ în intervalul $s \in [-1, 1]$, sunt prezentate în **figura 15.19,a**, în care, pentru $s = 0$ se obține o rampă pentru $t \in [0, \infty]$.

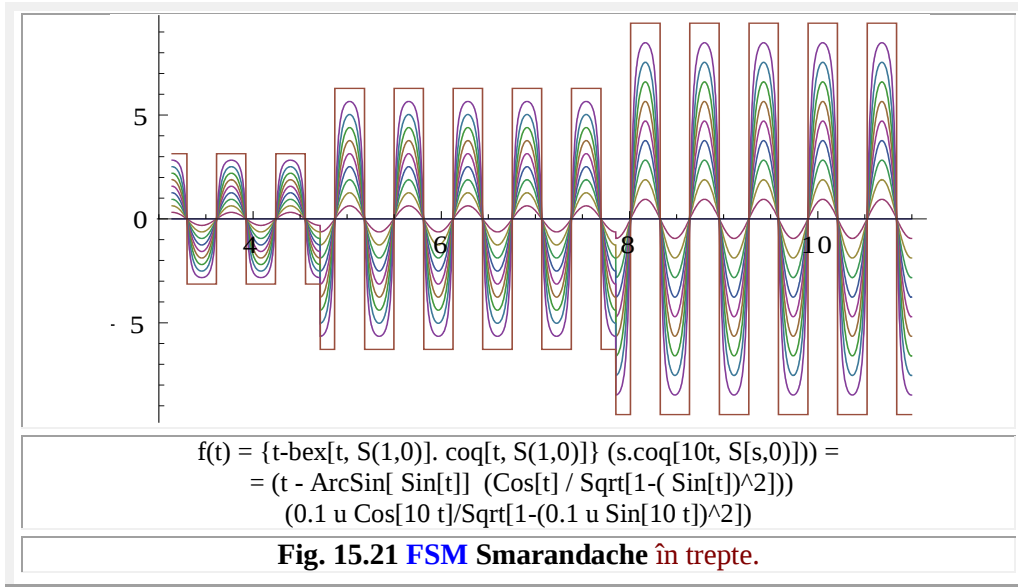
Funcții **rampă unitate** se pot obține prin înlocuirea constantei $m = \tan \alpha$ cu variabila $m = \tan \theta$ pentru excentricitate unitară $s \in [-1, 1]$.

15.5.5 FUNCȚII SUPERMATEMATICE (FSM) **SMARANDACHE ÎN TREPTE**

Prin combinarea funcțiilor **rampă excentrice**, de excentricitate numerică $s = 1$, cu funcții **dreptunghiulare excentrice**, rezultă **funcții în trepte**, denumite **funcții în trepte Smarandache**, în onoarea matematicianului român Dr. Math. **Florentin Smarandache** șeful Departamentului de Matematică de la Universitatea New Mexico, USA.

Câteva funcții de acest gen, împreună cu relațiile lor de definiție sunt prezentate în **figurile 15.20 și 15.21**.

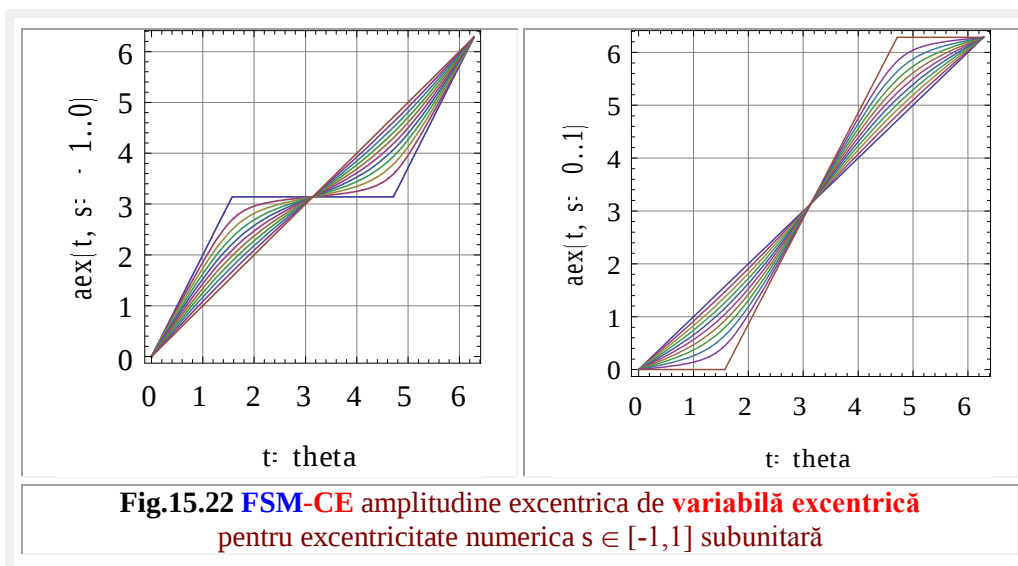


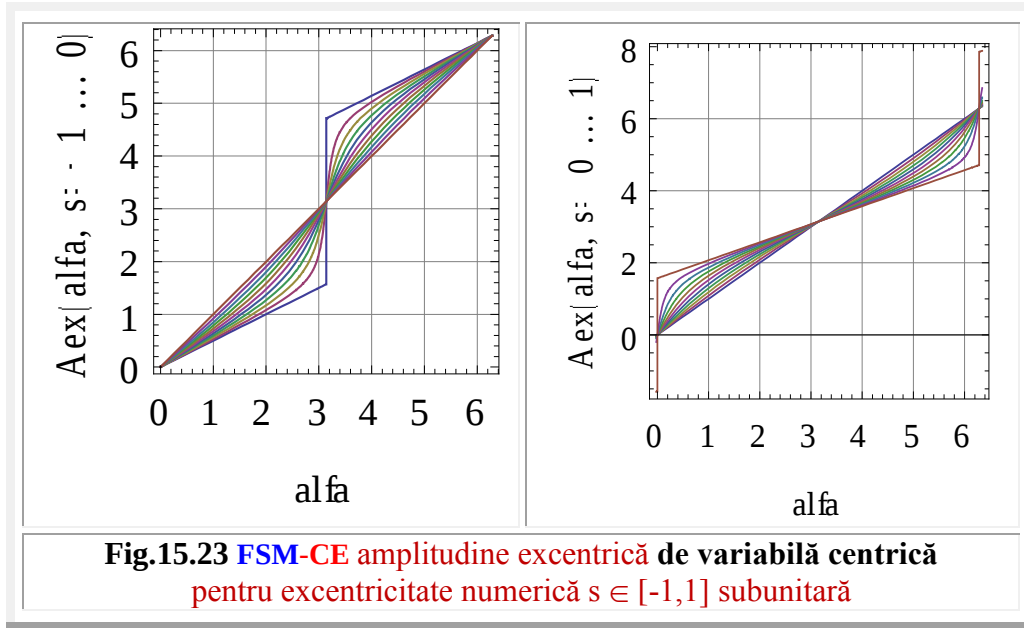


15.5.6 FUNCȚII SUPERMATEMATICE ÎN TREPTE

În capitolele anterioare au fost prezentate, cu precădere, **FSM-CE** de variabilă excentrică, variabilă notată cu θ sau cu y .

Așa cum s-a putut constata, aceste funcții sunt continue doar în domeniul în care excentrul $S(s, \epsilon)$ nu este exterior discului cercului unitate, adică, pentru excentricitatea numerică $s \leq 1$, sau, dacă, excentrul $E(e, \epsilon)$ nu este exterior discului circular de rază R , adică, pentru o excentricitate rălă $e \leq R$.





Dependențele dintre cele două tipuri de variabile motoare au fost numite **FSM-CE amplitudine excentrică**, și sunt **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă **excentrică** θ , notată $aex_{1,2}\theta$, ca și cele de variabilă centrică α_1 , notată, conform convenției cu majusculă $Aex\alpha_{1,2}$.

Expresiile **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă **excentrică** sunt

$$(15.39) \quad \begin{cases} \alpha_{1,2}(\theta) = aex_{1,2}\theta = \theta - \beta_{1,2}(\theta) \\ \quad \quad \quad = \theta - bex_{1,2}\theta \end{cases}$$

iar a celor de variabilă **centrică** sunt

$$(15.40) \quad \theta(\alpha_{1,2}) = Aex\alpha_{1,2} = \begin{cases} \alpha_{1,2} + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} \\ \alpha_{1,2} + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha_{1,2})} \end{cases}$$

Graficele lor sunt prezentate în **figura 15.22** și, respectiv, **15. 23**, pentru excentricitate numerică subunitară $s \in [-1, 1]$.

Pentru excentricitate numerică supraunitară, $s \in [-2, 2]$, graficele lui $aex\theta$ sunt prezentate în **figurile 15.24** și ale lui $Aex\alpha$ în **figura 15.25**.

Comparând graficele celor doua familii de **FSM-CE**, se poate observa că cele de variabilă excentrică sunt discontinue, pentru $s \in [1, 2]$ și pentru $s \in [-2, -1]$, în timp ce, cele de variabilă centrică sunt continue și pentru excentricitatea numerică supraunitară, $s > 1, s < -1 \rightarrow s^2 > 1$.

Pentru excentricități numerice supraunitare, **FSM-CE** există doar în domeniile în care o dreaptă $\mathbf{d} = \mathbf{d}^+ \cup \mathbf{d}^-$, turnantă în jurul excentrului **S** sau **E**, intersectează cercul unitate, respectiv, pe cel de rază R.

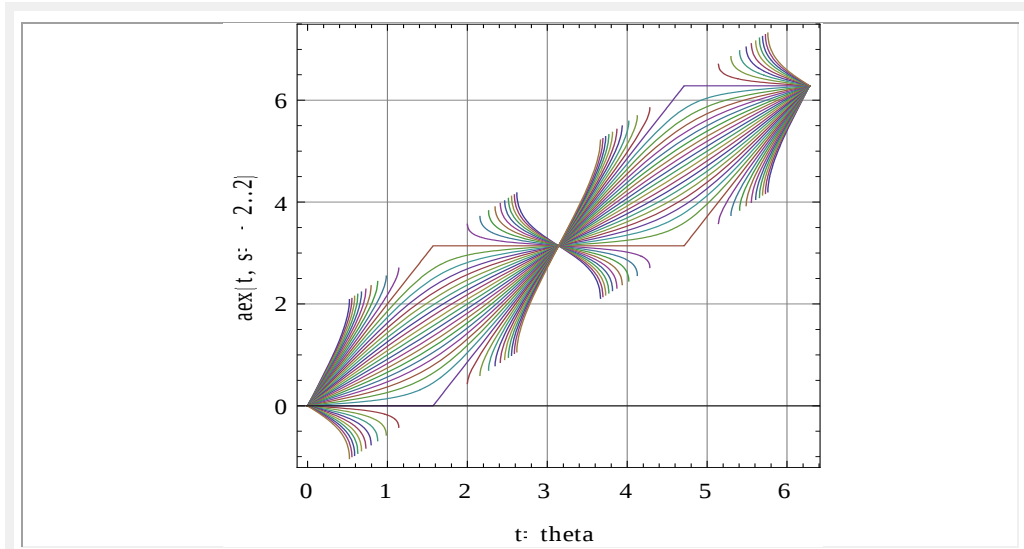


Fig.15.24 FSM-CE amplitudine excentrica de variabilă excentrică
pentru excentricitate numerica $s \in [-2, 2]$ supraunitară

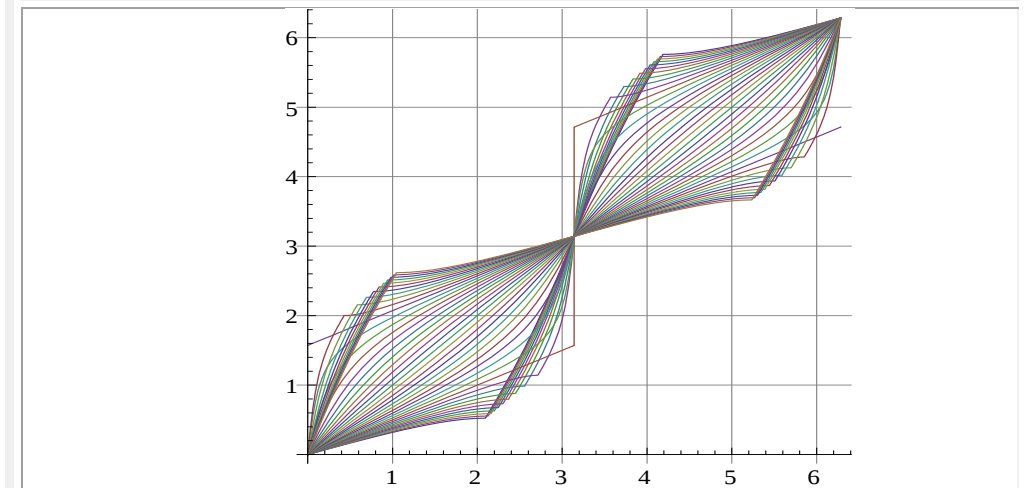


Fig.15.25 FSM-CE amplitudine excentrica de variabilă centrică
pentru excentricitate numerica $s \in [-2, 2]$ supraunitară

Notând cu W_i și cu W_f cele două puncte de tangență ale cercului unitate / trigonometric $CU(O,1)$ cu dreapta $\mathbf{d}$, coordonatele polare ale acestor puncte de tangență, denumite punct inițial (W_i) și punct final (W_f), față de centrul $O(0,0)$ sunt

$W_i(1, \alpha_i)$, $W_f(1, \alpha_f)$ iar față de excentrul $S(s, \varepsilon)$ vor fi $W_i(r_i, \theta_i)$, $W_f(r_f, \theta_f)$ în care, razele polare, din excentrul S , $r_{i,f}$ sunt date de **FSM-CE** radial excentric de θ și, respectiv, de $\alpha_{1,2}$

$$(15.41) \quad r_{i,f\ 1,2} = rex_{1,2}\theta_{i,f} = Rex\alpha_{1,2} = \pm(\sqrt{s^2 - 1})$$

cu plus pentru prima determinare principală ($1 \rightarrow +$) și cu minus pentru a doua determinare secundară ($2 \rightarrow -$).

Din (15.43) rezultă valorile sinusurilor unghiurilor limită excentrice $\theta_{i,f}$, care sunt

$$(15.42) \quad \sin(\pi - \theta_{i,f} + \varepsilon) = \frac{1}{r_{i,f}} \rightarrow$$

din care se deduc valorile unghiulare limită excentrice

$$(15.43) \quad \theta_{i,f} = \pi + \varepsilon - \arcsin \frac{1}{r_{i,f}} = \pi + \varepsilon - \arcsin \frac{1}{\pm(\sqrt{s^2 - 1})} \quad \text{și ale celor centrice}$$

$$(15.44) \quad \alpha_{i,f} = \arcsin \frac{r_{i,f\ 1,2}}{s} + \varepsilon = \arcsin \left[\frac{\pm(\sqrt{s^2 - 1})}{s} \right] + \varepsilon = \arcsin \left[\pm \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \right] + \varepsilon.$$

15.6 VARIANTE DE DEFINIRE A **FSM-CE** DE VARIABILĂ CENTRICĂ

Există mai multe posibilități de definire a **FSM-CE** de variabilă centrică, dintre care, prima variantă este prezentată schematic în **figura 15.26**.

În partea superioară este prezentat cazul excentrului **S(s, ε)** interior discului cercului unitate, adică $s < 1$ și, în partea de jos, cazul excentrului exterior acestuia, adică de $s > 1$. Excentrul **S** corespunde cu centrul cercului unitate $C[O(0,0), 1]$.

Aceasta este o primă variantă posibilă de definire a acestor **funcții supermatematice circulare** de **variabilă centrică (FSM-CE)**, care corespunde cu definirea **FSM-CE** de variabilă excentrică, deoarece și aici cele două determinări ale funcțiilor sunt defazate între ele cu π , atât pentru $s < 1$ cât și pentru cazul $s > 1$ (**Fig. 15.26**), deoarece W_1 și W_2 sunt situate pe aceeași dreaptă **d**, dar, unul pe d^+ și celălalt pe d^- .

Diferența este că, dacă argumentul excentric $\theta = \Omega t$ variază uniform, pentru $\Omega = \text{constant}$, argumentul centric $\theta(\alpha)$ variază neuniform, deși $\alpha = \Omega t$ este o variație uniformă a argumentului centric α . Dependența este dată de relația

$$(15.45) \quad \theta(\alpha) = Aex\alpha = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha} = \\ = \Omega \cdot t + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\Omega t - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\Omega t - \varepsilon)}}$$

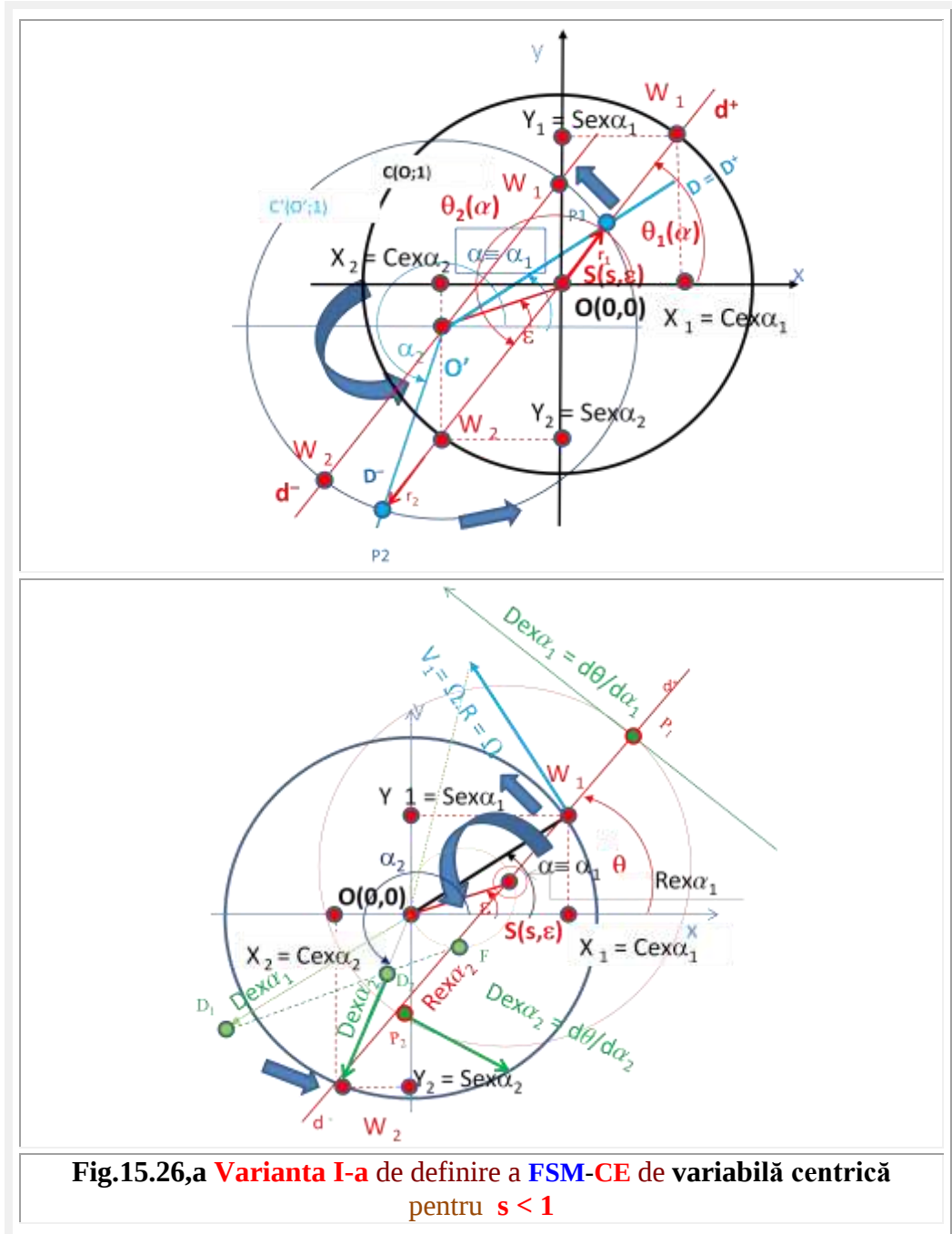
Este evident faptul că coordonatele punctului $P_1(x_1, y_1)$ sunt **FCC** $x_1 = \cos\alpha$ și $y_1 = \sin\alpha$.

Se observă că pentru cazul $s < 1$, (**Fig. 15.26,a**) variabila motoare $\alpha = \alpha_1$ determină pe cercul **C'** punctul **P₁**. Acesta, împreună cu excentru **S(s, ε)**, determină dreapta **d**, dreaptă împărțită de **S** în cele două semidrepte: pozitivă d^+ și negativă d^- .

Intersecția dreptei **d** cu cercul unitate **C(O,1)** determină punctele **W_{1,2}** și, prin acestea, **FSM-CE** de variabilă **centrică**.

Mai rezultă din figură că

$$(15.46) \quad \begin{cases} \theta_1(\alpha_1) = \theta(\alpha) = \alpha_1 + \beta_1(\alpha_1) = \alpha + \beta(\alpha) \\ \theta_2(\alpha) = \theta_2(\alpha) + \pi \end{cases}$$



În această primă varianta, se poate renunța la cel de-al doilea cerc unitate $C(S,1)=C(o,1)$, **FSM-CE** $Cex\alpha$ și $Sex\alpha$ pot fi la fel de bine reprezentate pe cercul $C'(O',1)$, dicând din O , paralele cu W_1W_2 , adică de direcție $\theta(\alpha)$ cu axa $O'x$ sau Ox , așa cum s-a marcat suprapus în **figura 15.26**. **FSM-CE** $Rex\alpha$ și $Dex\alpha$ se reprezintă cel mai simplu direct pe cercul C' cum se arată în **dreapta → figurii 15.26,a**.

În **ambele variante**, variabila motoare este $\alpha = \alpha_1$.

În **varianta I-a** ea va genera punctul P_1 , prin intersecția cercului unitate C' cu direcția α_1 a vectorului $\vec{R}_1$ din O' , de modul unitate, vector situat pe dreapta $D = D^+ \cup D^-$ în sensul pozitiv al semidreptei pozitive D^+ .

Dreapta centrică D este turnantă în jurul centrului $O'(0,0)$ și trece prin acesta, astfel că semidreapta D^+ va determina punctul P_1 de intersecție cu cercul

