

Două probleme de minim geometric

I. PĂTRAȘCU¹, F. SMARANDACHE²

Abstract. In this Note two problems of geometric minima are solved. The first is: given a proper angle xAy and a fixed point P in its interior, construct a straight line BC through P with $B \in (Ax$ and $C \in (Ay$ such that the perimeter of the triangle ABC to be minimal. The second one is related to the first: Let xAy be a proper angle and $C(J)$ be a circle tangent to its sides. Construct a tangent BC to this circle for $B \in (Ax$ and $C \in (Ay$ such that the circle to be inscribed in the triangle ABC and the perimeter of the triangle ABC to be minimal.

Keywords: angle, triangle, circle, minimal perimeter

MSC 2010: 51M04.

În acest articol rezolvăm două probleme de minim geometric; prima este din [1], iar pe a doua am formulat-o în legătură cu prima.

Enunțul primei probleme este următorul:

Problema 1. *Se dă un unghi propriu xAy și P un punct fixat în interiorul său. Construiți prin P o secantă BC , cu $B \in (Ax$ și $C \in (Ay$, astfel ca triunghiul ABC să aibă perimetrul minim.*

Pentru rezolvarea problemei, folosim următoarea:

Lemă. *Dacă xAy este un unghi propriu și $C(J)$ este un cerc tangent laturilor $(Ax$ și $(Ay$, fixat, iar BC este o tangentă la acest cerc astfel încât cercul să fie A -exînscribit triunghiului ABC , atunci perimetrul triunghiului ABC este constant.*

Demonstrația Lemei. Fie D și E punctele de tangentă cu $(Ax$ respectiv $(Ay$ ale cercului $C(J)$ și fie BC o tangentă oarecare la acest cerc în condițiile enunțului (vezi Fig. 1). Notăm cu T contactul tangentei BC cu cercul. Cu ajutorul teoremei tangentelor duse dintr-un punct exterior la un cerc, avem că: $BD = BT$, $CT = CE$ și $AD = AE$. Cum perimetrul triunghiului ABC este $AB + BC + AC = AB + BT + TC + AC$, avem că $AB + BC + AC = AB + AC + BD + CE = AD + AE = 2AD = \text{constant}$.

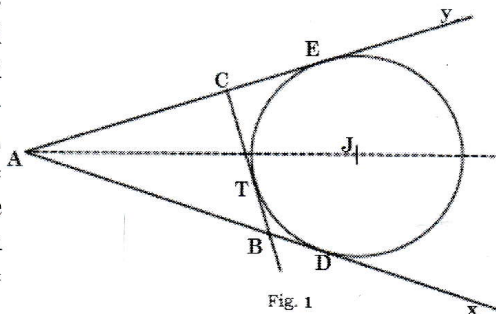


Fig. 1

Rezolvarea problemei

Afirmăm că triunghiul ABC de perimetru minim pentru care BC trece prin P este acela în care BC este tangent în P cercului ce trece prin P și este tangent laturilor $(Ax$ și $(Ay$ ale unghiului dat.

Din Lemă, am văzut că perimetrul triunghiului ABC (orice triunghi cu BC tangentă cercului) este constant și egal cu $2AD$. Să arătăm că orice triunghi $AB'C'$ cu $B'C'$ secantă ce trece prin P este mai mare decât perimetrul triunghiului ABC .

Putem construi o secantă $B''C'' \parallel B'C'$ care să fie tangentă cercului $C(J)$

¹Profesor, Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova, Romania; patrascu.ion@yahoo.com

²Profesor, University of New Mexico, Gallup, NM, USA; fsmarandache@gmail.com

și acesta din urmă să fie A -exînscriș triunghiului $AB''C''$. Perimetrul triunghiului $AB''C''$ este egal cu cel al triunghiului ABC (conform lemei), deci cu $2AD$. Evident că perimetrul triunghiului $AB'C'$ este mai mare decât perimetrul triunghiului $AB''C''$ (vezi Fig. 2), în consecință triunghiul ABC are perimetrul minim.

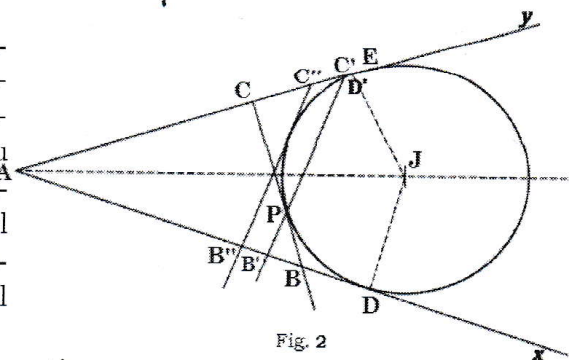


Fig. 2

Deoarece problema propusă cere construcția secantei BC , deci implicit a cercului ce trece prin P și este tangent laturilor $(Ax$ și Ay ale unghiului, prezentăm două metode de a realiza construcția cercului.

Prima construcție

Presupunem problema rezolvată, fie deci $C(J)$ tangent laturilor $(Ax$ și Ay ce va trece prin P .

Centrul J al cercului este situat pe bisectoarea $(Az$ a unghiului xAy , deci cercul va trece și prin punctul Q simetricul lui P față de $(Az$. Notăm $\{R\} = PQ \cap (Ax$. Puterea punctului R față de cercul $C(J, JP)$ furnizează $RP \cdot RQ = RD^2$ (D punctul de tangentă cu $(Ax$ al cercului, vezi Fig. 3).

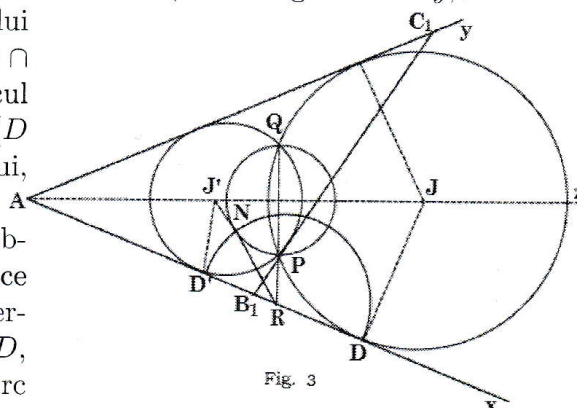


Fig. 3

Dacă vom construi punctul D , problema este practic rezolvată, deoarece cunoaștem trei puncte P, Q, D pe cercul căutat. Pentru a construi punctul D , putem proceda astfel: Construim un cerc arbitrar care trece prin P și Q ; construim tangenta RN din R la acest cerc și construim cercul $C(R, RN)$; acesta va intersecta $(Ax$ în două puncte D și D' .

Problema are două soluții: cercul circumscris triunghiului DPQ și cercul circumscris triunghiului $D'PQ$. Tangenta în P la cel din urmă cerc notată în figură, B_1C_1 , formează cu A un triunghi în care cercul $D'PQ$ este înscris.

Putem arăta ca mai înainte că perimetrul acestui triunghi este mai mare decât al triunghiului ABC în care BC este tangenta în P la cercul DPQ .

A doua construcție

Construim un cerc tangent laturilor $(Ax$ și Ay . Fie J_1 centrul său. Notăm M_1M_2 intersecțiile acestui cerc cu (AP) . Construim $PJ \parallel J_1M_1$, $J \in (Az$ și $PJ' \parallel J_1M_2$, $J' \in (Az$ (vezi Fig. 4). Cercurile $C(J', J'P)$, fiind omotetice cercului $C(J_1, M_1)$ prin omotetiile corespunzătoare, sunt cele căutate.

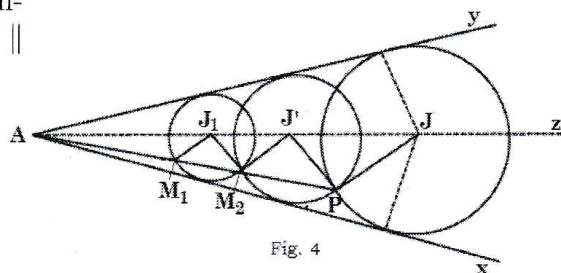


Fig. 4

Observație. Lema și Problema analizate ne-au condus la următoarea problemă de minim:

Problema 2. Fie xAy un unghi propriu dat și fie $\mathcal{C}(J)$ un cerc tangent laturilor (Ax) și (Ay) fixat. Construiți o tangentă BC la cerc, $B \in (Ax)$, $C \in (Ay)$ astfel ca cercul dat să fie cerc înscris al triunghiului ABC , iar ABC să aibă perimetrul minim.

Rezolvarea problemei. Să considerăm o tangentă $B'C'$ la cercul $\mathcal{C}(J)$ și cercul A -exînscriștriunghiului $AB'C'$ de centru J' . Dacă D și D' sunt contactele cercurilor $\mathcal{C}(J)$ și $\mathcal{C}(J')$ cu (Ax) , avem că: Perimetrul triunghiului $AB'C'$ este egal cu $2AD + 2B'C'$ și tot el este egal cu $2AD'$ (vezi Fig. 5). Pentru ca perimetrul triunghiului $AB'C'$ să fie minim, este necesar ca $B'C'$ să fie minimă, și cum $B'C' = AD' - AD$, iar AD este constantă, este necesar ca AD' să fie minimă. Dacă vom nota $J'D' = x$, $JD = r$ și $\widehat{mAy} = 2\varphi$, avem: $\sin \varphi = \frac{x-r}{JJ'}$, deci

$$JJ' = \frac{x-r}{\sin \varphi}. \text{ Deoarece}$$

$$DD' = \sqrt{JJ'^2 + (x-r)^2} = (x-r) \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi}}$$

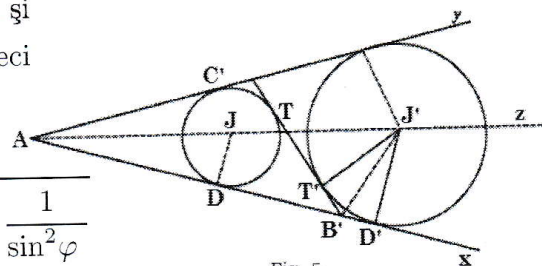


Fig. 5

găsim că minimumul lui DD' se atinge odată cu minimumul lui $x = J'D'$. Aceasta se întâmplă când cercul de centru J' este tangent cercului de centru J . În acest caz, BC este tangentă comună acestor cercuri și este perpendiculară pe (Az) , bisectoarea $\angle xAy$.

Bibliografie

1. F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, huitième édition, Librairie générale de l'enseignement libre, 77 Rue de Vaugirard. Paris (6).