

一个包含 F.Smarandache LCM 函数的 猜想

朱伟义

浙江师范大学数理信息工程学院 金华 321004
E-mail: zwy@zjnu.cn

摘 要 对任意正整数 n , 著名的 F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k , 使得 $n \mid [1, 2, \dots, k]$, 这里 $[1, 2, \dots, k]$ 表示 $1, 2, \dots, k$ 的最小公倍数. 本文利用初等方法研究张文鹏在他所著的《初等数论》一书中提出的一个包含 F.Smarandache LCM 函数的猜想, 并有了实质性进展.

关键词 F.Smarandache LCM 函数; 猜想; 初等方法

MR(2000) 主题分类 11B83

中图分类 O156.4

A Conjecture Involving the F.Smarandache LCM Function

Wei Yi ZHU

College of Mathematics, Physics and Information Engineer,
Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, P. R. China
E-mail: zwy@zjnu.cn

Abstract For any positive integer n , the famous F.Smarandache LCM function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n \mid [1, 2, \dots, k]$, where $[1, 2, \dots, k]$ denotes the least common multiple of $1, 2, \dots, k$. The main purpose of this paper is to use using the elementary methods to study a conjecture involving the F.Smarandache LCM function, which is proposed by Zhang Wenpeng in his book "Elementary Number Theory", thus making some substantial progress for this conjecture.

Keywords F.Smarandache LCM function; elementary method; conjecture

MR(2000) Subject Classification 11B83

Chinese Library Classification O156.4

1 引言及结论

对于任意正整数 n , 著名的 F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k , 使得 $n \mid [1, 2, \dots, k]$, 这里 $[1, 2, \dots, k]$ 表示 $1, 2, \dots, k$ 的最小公倍数. 例如, 函数 $SL(n)$ 的前几项值依次为 $SL(1) = 1$, $SL(2) = 2$, $SL(3) = 3$, $SL(4) = 4$, $SL(5) = 5$, $SL(6) = 3$, $SL(7) = 7$,

收稿日期: 2007-09-21; 接受日期: 2008-05-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671155)

$SL(8) = 8, SL(9) = 9, SL(10) = 5, SL(11) = 11, SL(12) = 4, SL(13) = 13, SL(14) = 7, SL(15) = 5, SL(16) = 16, \dots$ 从 $SL(n)$ 的定义很容易推出: 如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的素因子分解式, 那么

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_r^{\alpha_r}\}.$$

关于 $SL(n)$ 的一些性质, 很多学者进行过研究, 并且得到了一系列有趣的结果. 例如, Murthy 在文 [2] 中证明了: 如果 n 为素数, 则有 $SL(n) = S(n)$, 这里 $S(n)$ 为 F.Smarandache 函数. 即就是 $S(n) = \min\{m : n | m!, m \in N\}$. 同时 Murthy [2] 还提出了下面的问题: n 为何值时, 有

$$SL(n) = S(n), \quad S(n) \neq n? \quad (1)$$

Le Maohua [3] 完全解决了这个问题, 并证明了下面的结论:

任何满足 (1) 的整数可表示为

$$n = 12 \text{ 或者 } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p,$$

其中 $p_1, p_2, \dots, p_r, p$ 是不同的素数且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是满足 $p > p_i^{\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, r$ 的正整数.

此外, Lv Zhongtian [4] 研究了 $SL(n)$ 的均值问题, 证明了对任意给定的正整数 k 及任意实数 $x > 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} SL(n) = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^k \frac{c_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $c_i (i = 2, 3, \dots, k)$ 是可计算的常数.

Ge Jian [5] 中还研究了 $[SL(n) - S(n)]^2$ 的均方差分布, 获得了渐近公式

$$\sum_{n \leq x} [SL(n) - S(n)]^2 = \frac{2}{3} \cdot \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数, $c_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是可计算的常数.

现在考虑和式

$$\sum_{d|n} \frac{1}{SL(d)}, \quad (2)$$

其中 $\sum_{d|n}$ 表示 n 的所有正因子. 我们发现几乎对所有整数 $n > 1$, (2) 式不可能为整数. 张文鹏教授在他所著的《初等数论》一书中 (参阅文 [6]), 建议研究这一问题. Wu Qibin 在文 [7] 中证明了对于一些特殊整数 n 如素数的方幂或者无平方因子数, (2) 式不可能为整数. 本文给出了 (2) 式为整数的几个必要条件, 通过这些必要条件, 很容易推出满足 (2) 式为整数的 n 是非常稀少的. 这样进一步说明文 [6] 中的猜测几乎是正确的, 甚至有下面更确切的:

猜想 对于任意正整数 n , 和式 (2) 为整数当且仅当 $n = 1, 36$.

对于这一猜想, 我们目前虽然不能证明它, 但对它的正确性深信不疑. 本文就是利用初等方法研究这一个问题, 并给出 (2) 式为整数的三个必要条件, 即就是证明下面三个结论:

定理 1 对于任意整数 $n > 1$, (2) 式为整数的必要条件是 n 为 Square-full 数 (即就是对任意素数 p , 若 $p|n$, 则有 $p^2|n$).

定理 2 对任意奇数 $n > 1$, (2) 式为整数的必要条件是 n 为 Cubic-full 数 (即就是对任意素数 p , 若 $p|n$, 则有 $p^3|n$).

定理 3 对任意整数 $n > 1$ 且 $(n, 6) = 1$, (2) 式为整数的必要条件是 n 为 5-full 数 (即就是对任意素数 p , 若 $p | n$, 则有 $p^5 | n$).

2 定理的证明

这一部分将直接完成定理的证明. 首先证明定理 1. 我们用反证法来证明这一结论. 事实上, 假定整数 $n > 1$, 使得 (2) 式为整数且 n 不是 Square-full 数, 那么在 n 的标准分解式 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 中, 至少含有一个素数 p_i 其方幂为 $\alpha_i = 1$, 所以 $(\frac{n}{p_i}, p_i) = 1$. 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{1}{SL(d)} &= \sum_{d|\frac{n}{p_i}} \frac{1}{SL(d)} + \sum_{d|\frac{n}{p_i}} \frac{1}{SL(dp_i)} \\ &= \sum_{d|\frac{n}{p_i}} \frac{1}{SL(d)} + \frac{1}{p_i} \sum_{\substack{d|\frac{n}{p_i} \\ SL(d) < p_i}} 1 + \sum_{\substack{d|\frac{n}{p_i} \\ SL(d) > p_i}} \frac{1}{SL(d)}. \end{aligned} \quad (3)$$

在 $\frac{n}{p_i}$ 的标准分解式 $\frac{n}{p_i} = n_1 = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_{s-1}^{\beta_{s-1}}$ 中, 假定 γ_j 是最大的非负整数, 使得 $q_j^{\gamma_j} < p_i$, $j = 1, 2, \dots, s-1$. 取 $\delta_j = \min\{\beta_j, \gamma_j\}$. 现在我们计算和式

$$\sum_{\substack{d|\frac{n}{p_i} \\ SL(d) < p_i}} 1,$$

显然若 $SL(u) < p_i$, $SL(v) < p_i$, $(u, v) = 1$, 则由函数 $SL(n)$ 的性质知 $SL(uv) < p_i$. 于是由 δ_j 的定义可知对任意 $d | q_1^{\delta_1} q_2^{\delta_2} \cdots q_{s-1}^{\delta_{s-1}}$, 有 $SL(d) < p_i$, 而且对任意 $d | \frac{n}{p_i}$, 若 $SL(d) < p_i$, 则 $d | q_1^{\delta_1} q_2^{\delta_2} \cdots q_{s-1}^{\delta_{s-1}}$. 于是可得

$$\frac{1}{p_i} \sum_{\substack{d|\frac{n}{p_i} \\ SL(d) < p_i}} 1 = \frac{1}{p_i} \sum_{d|q_1^{\delta_1} q_2^{\delta_2} \cdots q_{s-1}^{\delta_{s-1}}} 1 = \frac{1}{p_i} (\delta_1 + 1)(\delta_2 + 1) \cdots (\delta_{s-1} + 1). \quad (4)$$

现在结合 (3) 及 (4) 式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{n_1}{SL(d)} &= \sum_{d|n_1} \frac{n_1}{SL(d)} + \frac{n_1}{p_i} \sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) < p_i}} 1 + \sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) > p_i}} \frac{n_1}{SL(d)} \\ &= \sum_{d|n_1} \frac{n_1}{SL(d)} + \frac{n_1}{p_i} (\delta_1 + 1)(\delta_2 + 1) \cdots (\delta_{s-1} + 1) + \sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) > p_i}} \frac{n_1}{SL(d)}. \end{aligned} \quad (5)$$

在 (5) 式中, 由假设 $\sum_{d|n} \frac{1}{SL(d)}$ 为整数, 当 $d | n_1$ 时, $\frac{n_1}{SL(d)}$ 显然是整数, 从而

$$\sum_{d|n_1} \frac{n_1}{SL(d)} \quad \text{及} \quad \sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) > p_i}} \frac{n_1}{SL(d)}$$

也必为整数. 于是可以推出 (5) 式中剩下的一项

$$\frac{n_1}{p_i} (\delta_1 + 1)(\delta_2 + 1) \cdots (\delta_{s-1} + 1)$$

必为整数. 再由于 $(n_1, p_i) = 1$, 所以上式中至少有一项满足 $p_i | (\delta_j + 1)$, 则 $\delta_j \geq p_i - 1$. 由此及 δ_j 的定义不难看出 $p_i > q_j^{\delta_j} \geq q_j^{p_i-1}$. 矛盾. 因为对任意两个不同的素数 p 及 q 不可能有 $p > q^{p-1}$. 所以当 $n > 1$ 且 (2) 式为整数时, n 一定是一个 Square-full 数. 于是完成了定理 1 的证明.

顺便指出, $n = 36$, 使得 (2) 式为整数, 它也是一个 Square-full 数. 现在我们证明定理 2. 还是用反证法. 假定奇数 $n > 1$ 为 Square-full 数满足 (2) 式, 但是 n 不是 Cubic-full 数, 则在 n 的标准分解式中至少有一个素因子其方幂为 2. 不妨设 $n = n_1 p^2 = p^2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $(p, n_1) = 1$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{n_1 p}{SL(d)} &= \sum_{d|n_1} \frac{n_1 p}{SL(d)} + \sum_{d|n_1} \frac{n_1 p}{SL(dp)} + \sum_{d|n_1} \frac{n_1 p}{SL(dp^2)} \\ &= \sum_{d|n_1} \frac{n_1 p}{SL(d)} + \sum_{d|n_1} \frac{n_1 p}{SL(dp)} + \frac{n_1}{p} \sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) < p^2}} 1 + \sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) > p^2}} \frac{n_1 p}{SL(d)}. \end{aligned} \quad (6)$$

同样设 γ_i 是最大的非负整数, 使得 $p_i^{\gamma_i} < p^2$, $i = 1, 2, \dots, k$. 取 $\delta_i = \min\{\alpha_i, \gamma_i\}$, 则容易计算出

$$\sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) < p^2}} 1 = (\delta_1 + 1) \cdot (\delta_2 + 1) \cdots (\delta_k + 1).$$

于是由 (6) 式可得

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{n_1 p}{SL(d)} &= \sum_{d|n_1} \frac{n_1 p}{SL(d)} + \sum_{d|n_1} \frac{n_1 p}{SL(dp)} + \sum_{\substack{d|n_1 \\ SL(d) > p^2}} \frac{n_1 p}{SL(d)} \\ &\quad + \frac{n_1}{p} (\delta_1 + 1) \cdot (\delta_2 + 1) \cdots (\delta_k + 1). \end{aligned} \quad (7)$$

与定理 1 的证明过程相似, 通过分析可得 (7) 式中 p 至少整除乘积 $(\delta_1 + 1) \cdot (\delta_2 + 1) \cdots (\delta_k + 1)$ 中的某一项, 不妨设 $p | \delta_i + 1$. 于是 $\delta_i \geq p - 1$. 从而推出 $p^2 > p_i^{\delta_i} \geq p_i^{p-1}$, 矛盾. 因为 n 为奇数, 所以对任意两个奇素数 p 和 q , 不可能有 $p^2 > q^{p-1}$. 因此若奇数 $n > 1$ 满足 (2) 式为整数, 则 n 一定是一个 Cubic-full 数, 于是证明了定理 2.

定理 3 的证明与定理 2 相同, 利用反证法可推出当 $n > 1$ 且 $(n, 6) = 1$ 时, 若 n , 使得 (2) 式为整数, 则存在 $p | n$, $p_i | n$, 使得 $p^4 > p_i^{p-1}$. 显然 $(n, 6) = 1$ 时这是不可能的, 从而推出定理 3. 于是完成了定理的证明.

参 考 文 献

- [1] Smarandache F., Only problems, not solutions, Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
- [2] Murthy A., Some notions on least common multiples, *Smarandache Notions Journal*, 2001, 12: 307-309.
- [3] Le M. H., An equation concerning the Smarandache LCM function, *Smarandache Notions Journal*, 2004, 14: 186-188.
- [4] Lv Z. T., On the F.Smarandache LCM function and its mean value, *Scientia Magna*, 2007, 3(1): 22-25.
- [5] Jian G., Mean value of F.Smarandache LCM function, *Scientia Magna*, 2007, 3(2): 109-112.
- [6] Zhang W. P., Elementary number theory, Xi'an: Shanxi Normal University Publishers, 2007.
- [7] Wu Q. B., A conjecture involving the F.Smarandache LCM function, *Scientia Magna*, 2007, 3(1): 26-28.
- [8] Apostol Tom M., Introduction to analytic number theory, New York: Springer-Verlag, 1976.
- [9] Pan C. D., Pan C. B., The elementary proof the print theory, Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1988.
- [10] Xu Z. F., On the mean value of the Smarandache power function, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, 49(1): 77-80.